

República de Colombia
Departamento Nacional de Planeación
Dirección de Estudios Económicos

ARCHIVOS DE ECONOMÍA

Modelo Estándar de Equilibrio General Computable

Álvaro Andrés PERDOMO STRAUCH

Documento 342
17 de julio de 2008.

La serie ARCHIVOS DE ECONOMIA es un medio de divulgación de la Dirección de Estudios Económicos, no es un órgano oficial del Departamento Nacional de Planeación. Sus documentos son de carácter provisional, de responsabilidad exclusiva de sus autores y sus contenidos no comprometen a la institución.

Consultar otros **Archivos de economía** en
<http://www.dnp.gov.co/PortalWeb/EstudiosEconomicos/ArchivosdeEconomía/tabid/106/Default.aspx>

Modelo Estándar de Equilibrio General Computable

Álvaro Andrés PERDOMO STRAUCH*

Introducción

Cuando se llevan a cabo discusiones de política económica es importante utilizar herramientas provenientes de la teoría económica que permitan adelantar con mayor solidez las argumentaciones. Igualmente, cuando se estudian modelos de teoría económica es interesante incorporar dentro de estos modelos cifras de la vida real para ver cuál es el comportamiento de los mismos ante diferentes choques o medidas de política económica.

En varias ocasiones ninguna de las dos actividades anteriormente reseñadas es llevada a cabo porque no se cuenta con la experiencia y/o con el tiempo suficiente para desarrollar las herramientas adecuadas que permitan adelantar dichas actividades.

En este documento se va a presentar un modelo estándar de equilibrio general computable que pueda ser utilizado como insumo para adelantar diferentes discusiones de política económica¹. Con lo anterior no se está afirmando que este modelo deba ser el único insumo a tener en cuenta en las discusiones; sin embargo, una versión más estilizada del modelo que aquí se plantea podría ser incorporado dentro de la batería de herramientas

* Este documento fue escrito mientras me desempeñaba como Subdirector Técnico de la Dirección de Estudios Económicos del Departamento Nacional de Planeación. Se agradecen los comentarios de los asistentes a las presentaciones del modelo llevadas a cabo en la Dirección de Estudios Económicos. Las opiniones y posibles errores en este trabajo son de la responsabilidad exclusiva del autor y no comprometen al Departamento Nacional de Planeación. Si el lector tiene comentarios acerca del documento o del modelo, por favor hágame llegar a alvaroperdomo@gmail.com. Las respuestas a dichos comentarios se van a publicar en <http://alvaroperdomo.googlepages.com/>

¹ A las personas que vayan a utilizar este modelo se les pide el favor que hagan los reconocimientos respectivos. Igualmente, se las invita para que expongan en forma clara los cambios que le hicieron al modelo y las características más relevantes de las simulaciones que están llevando a cabo.

con las que se lleve a cabo una discusión en particular. Es importante resaltar que como todo modelo, el modelo que se presenta en este documento es una simplificación de la realidad, por lo tanto se tienen que tener en cuenta dos aspectos al momento de ser utilizado. Primero, en muchas ocasiones el modelo habrá de ser modificado para mejorar su utilidad ante diferentes discusiones de política económica. Segundo, el modelo no va a servir para responder todas las preguntas que a uno le interesaría analizar; por lo tanto, se debe estar consciente de los alcances del mismo y no se le debe forzar a responder preguntas para las cuales no está diseñado. Por otro lado, este modelo puede ser de utilidad para adelantar discusiones a nivel académico ante diferentes escenarios que con el mismo se puedan simular.

En la literatura internacional existen diversos documentos que son muy útiles para las personas interesadas en construir modelos de equilibrio general computable, ejemplo de ello son los artículos de Löfgren et al. (2002) y McDonald (2005). El modelo que aquí les presentamos tiene la ventaja de que ha sido especialmente adaptado con respecto al esquema de las Cuentas Nacionales de Colombia reportadas por el DANE; más específicamente, este modelo se ajusta a la información que se encuentra en las matrices de contabilidad social publicadas en Corredor y Pardo (2008). Adicionalmente, dado que el DANE construye las Cuentas Nacionales basándose en el SCN 93 de las Naciones Unidas², entonces el modelo que se desarrolla en este documento puede ser fácilmente adaptado a las economías de varios países.

El documento se divide en tres secciones. En la primera se va a presentar una breve reseña acerca de los modelos de equilibrio general computable. Esta reseña es importante en la medida en que es necesario entender cuál es el alcance de estos modelos y cuál es su utilidad dentro del análisis de política económica. En la segunda sección se explica la estructura del modelo. En la tercera sección se presentan algunos comentarios finales. Después de la última sección, el lector encontrará una serie de anexos que complementan lo que se expone en el cuerpo del documento.

² En Colombia las Cuentas Nacionales que utilizan el SCN 93 son las que tienen como años base 1994 y 2000.

1. Breve reseña acerca de los modelos de equilibrio general computable

1.1. ¿Qué es un modelo de equilibrio general computable? Es un modelo en el cual se trata de representar en forma de ecuaciones con sentido económico la estructura de la economía como un todo. En estas ecuaciones se representan los patrones de oferta y de demanda de los diferentes agentes que interactúan en la economía (consumidores, empresas, gobierno, sector externo, etc.)³.

Estos modelos pueden ser utilizados para la simulación de políticas económicas de diversa índole, como políticas fiscales, comerciales, medioambientales, entre otras. Es importante aclarar que el tipo de políticas que se pueden simular con un modelo específico dependen de las particularidades del mismo. Por ejemplo, hay modelos especialmente diseñados para analizar temas de economía internacional, otros para evaluar políticas laborales, otros para evaluar políticas medioambientales, etcétera.

Asimismo, los modelos de equilibrio general computable pueden ser utilizados para analizar eventos y choques económicos de diferente índole. Por ejemplo, algunos modelos son muy útiles para analizar los efectos de las enfermedades holandesas, o de las recesiones, entre otros fenómenos económicos.

1.2. ¿De donde proviene el nombre de estos modelos? Ahondando un poco en la etimología del nombre, el término “equilibrio general” se refiere a que estos modelos constituyen una aproximación analítica para el cual la economía es considerada como un sistema completo de componentes interdependientes en donde todas las decisiones son tomadas acorde a un comportamiento optimizador que permite alcanzar un equilibrio. En consecuencia, si se desarrolla una simulación en donde se plantea un choque o una política económica que afecta alguno de los componentes del sistema, entonces esto va a tener

³ Uno de los aspectos que hacen atractivo el uso de este tipo de modelos es la estructura de producción multisectorial que en los mismos es representada.

repercusiones sobre los demás componentes del modelo hasta que la economía alcanza un nuevo equilibrio.

Por otra parte, estos modelos son llamados “computables” en el sentido en el que se producen resultados numéricos que son aplicables a situaciones específicas en países particulares. Lo anterior es factible en la medida en que la información que alimenta los modelos proviene de datos del mundo real.

1.3. ¿Qué es una simulación? Una simulación no es lo mismo que un pronóstico. Un pronóstico es un enunciado sobre lo que es probable que ocurra en el futuro, basándose en análisis y en consideraciones de juicio. Una simulación es un ejercicio numérico contrafactual en el cual se trata de dar una indicación, al comparar un escenario base con un escenario simulado, acerca de lo que hubiera pasado en la economía si se hubiera estado en la situación del escenario simulado en vez de estar en la situación del escenario base.

Con respecto a los resultados numéricos que se obtienen con las simulaciones lo más importante al comparar los dos escenarios (el escenario base y el escenario simulado) es la dirección y el tamaño relativo de los efectos que se tendrían ante un choque o una política que afecte la economía.

1.4. ¿Para que sirven los modelos de equilibrio general computable? Estos modelos han sido regularmente utilizados como una técnica de análisis cuantitativo para llevar a cabo simulaciones que permiten resolver una gran variedad de preguntas. Estas preguntas generalmente van encaminadas a analizar los efectos inducidos por cambios en las políticas del gobierno (impuestos, restricciones comerciales, etc.) sobre las industrias, las regiones, el mercado laboral, el ingreso, el bienestar, etcétera.

Asimismo, es importante señalar que esta herramienta de análisis ha sido utilizada por una gran diversidad de investigadores tanto a nivel nacional como internacional para el

análisis de políticas. En particular vale la pena destacar la labor desarrollada por el Banco Mundial y por el Banco Interamericano de Desarrollo como apoyo a la elaboración de este tipo de modelos.

1.5. ¿Cuáles son las principales diferencias del modelo que se presenta en el documento frente a otros modelos de equilibrio general computable que se han construido para la economía colombiana? Para Colombia se han construido muchas versiones de modelos de equilibrio general computable, por ejemplo en López, et.al (1994) se hace una extensiva revisión bibliográfica al respecto. Sin embargo, el principal problema que tienen estas versiones es que no se han hecho públicas en el siguiente sentido; si alguien quisiera replicar los resultados de las simulaciones hechas con estos modelos no podría hacerlo porque sencillamente no se tiene acceso directo ni a la programación del modelo ni a las fuentes de información que fueron utilizadas en el desarrollo del mismo.

En cambio el modelo que aquí proponemos va a ser de fácil acceso al público en cuatro aspectos: (1) se hace uso de información que es de carácter público⁴; (2) se facilitan los códigos utilizados en la construcción del modelo⁵; (3) se explica en detalle la estructura de ecuaciones que hacen parte del modelo; y (4) se detalla la forma como se hizo la calibración de los parámetros y de las formas funcionales utilizadas en el modelo.

1.6. ¿Cuál es el software apropiado para construir estos modelos? Existen diferentes alternativas al momento de construir modelos de equilibrio general computable: lenguajes de programación de propósito general, lenguajes o entornos de cálculo numérico o simbólico y lenguajes algebraicos de modelado. Los códigos que están adjuntos al documento utilizan un lenguaje algebraico de modelado que se llama GAMS; en el anexo 1

⁴ La matriz de contabilidad social 2005 construida por Corredor y Pardo (2008) y los equilibrios oferta-utilización 2005 del DANE a dos dígitos (estos equilibrios se pueden descargar de la página del DANE www.dane.gov.co).

⁵ Los códigos utilizados en la programación de este modelo se encuentran ubicados en el archivo *MEEGC.zip*, el cual se puede descargar de la sección Archivos de Economía (Año 2008) de la página de Internet del Departamento Nacional de Planeación (www.dnp.gov.co)

se explica cuáles son las ventajas que tienen los lenguajes algebraicos de modelado⁶ en cuanto a la elaboración de este tipo de modelos.

2. Estructura del modelo

Antes de explicar la estructura del modelo es importante tener en cuenta varios aspectos del mismo. Primero, el modelo, tal como está planteado en este documento, sólo sirve para llevar a cabo análisis de estática comparativa⁷. En Annabi, Cockburn y Decaluwé (2004) se encuentran algunas ideas de cómo poder modificar este tipo de modelos para hacer análisis dinámicos. Asimismo, en Perdomo (2005) se utiliza un modelo de equilibrio general computable dinámico para analizar el impacto de un incremento en la inversión pública en infraestructura sobre el crecimiento de la economía colombiana⁸.

Segundo, los únicos datos utilizados en la construcción del modelo provienen de la matriz de contabilidad social 2005 de Corredor y Pardo (2005) y de los equilibrios oferta-utilización 2005 del DANE⁹. La información que se encuentra en la matriz de contabilidad social es la responsable de la mayor parte de la estructura del modelo que se expone en el documento¹⁰. Por su parte, fue necesario utilizar los equilibrios oferta-utilización porque a

⁶ Por ejemplo, *GAMS*, *AMPL*, *GEMPACK*, *AIMMS* y *XPRESS-MP*.

⁷ En otras palabras, al adelantar simulaciones con el modelo sólo se está comparando, como si fueran dos fotos, el equilibrio en un escenario base con el equilibrio en un escenario simulado y no se está especificando la trayectoria que sigue la economía al pasar de un equilibrio al otro.

⁸ Otra diferencia importante del modelo de Perdomo (2005) con respecto al modelo utilizado en este documento es que en Perdomo (2005) se utilizó una matriz de contabilidad social bienes-bienes, mientras que las matrices de contabilidad social de Corredor y Pardo (2008) son actividades-bienes. Sin embargo, es de anotar que en ambos modelos se puede implementar la misma estructura dinámica.

⁹ Esto no debería ser una restricción para que el modelador, al momento de modificar el modelo y el código, pueda utilizar información externa adicional a la que se utiliza en la versión estándar del modelo.

¹⁰ Por ejemplo, el modelo no reporta una estructura tributaria más desagregada por tipo de impuesto sencillamente porque las Cuentas Nacionales del DANE y por lo tanto las matrices de contabilidad social de Corredor y Pardo (2008) no la presentan. Sin embargo, si el modelador con ayuda de fuentes externas, a las

partir de la matriz de contabilidad social no es fácil identificar los valores sin y con márgenes de comercio y de transporte de la demanda interna, de las exportaciones y de las importaciones¹¹.

Tercero, dadas las características de la matrices de contabilidad social de Corredor y Pardo (2008), en particular a partir del hecho que éstas tiene diferentes tipos de hogares y de trabajo, entonces este modelo puede servir para llevar a cabo análisis de distribución del ingreso y de pobreza. Sin embargo, los resultados que arrojan las diferentes simulaciones hechas con el modelo también pueden ser utilizados para alimentar modelos de microsimulación¹² que permitan hacer análisis más detallados acerca de estos dos temas.

Cuarto, aunque en este documento no se desarrolla y en el código tampoco se tiene programado, el modelo puede adaptarse de manera sencilla ante diferentes estructuras del mercado laboral. Por ejemplo, Annabi (2003), Maechler y Roland-Host, (1995) y Vaughan (2005) presentan algunas ideas de cómo incorporar dichas estructuras dentro de los modelos de equilibrio general computable.

Quinto, las formas funcionales que se usaron en la construcción de este modelo son las más comúnmente utilizadas en los modelos de equilibrio general computable. No obstante, esto no debería ser una restricción para que la persona que utilice este modelo

utilizadas en este modelo, puede hacer esta desagregación, entonces no debería ser mayor problema cambiar el modelo y el código adjunto al documento para así incorporar la nueva información recolectada (por lo menos esta labor debería ser muchísimo más rápida de hacer que comenzar un nuevo código desde cero, presentándose así una importante ventaja en términos de tiempo que en últimas es lo que se quiere con este modelo)

¹¹ En las matrices de contabilidad social de Corredor y Pardo (2008) se pueden distinguir fácilmente los márgenes sectoriales de comercio y de transporte, pero no se puede identificar que parte de los mismos corresponde a demanda interna, exportaciones o importaciones.

¹² En Bourguignon y Spadaro (2006) se explican las características de diferentes tipos de análisis de microsimulación.

pueda programar sus propias formas funcionales. En el anexo 2 se explica la manera cómo fueron calibrados los parámetros y los diferentes tipos de funciones utilizados en el modelo.

Sexto, es importante tener en cuenta que todas las decisiones que toman los agentes dentro del modelo son optimizadoras y se hacen dentro de un contexto de competencia perfecta. En Francois (1998), Harris (1984), Hoffman (2003) y Willenbockel (2004) se encuentran algunas consideraciones de cómo introducir competencia imperfecta en los modelos de equilibrio general computable. Adicionalmente, al modelo que se presenta en este documento se le podrían introducir algunas ecuaciones que se alejen en parte del comportamiento optimizador, a semejanza de algunos modelos de corte estructuralista, de tal forma que a juicio de la persona que utiliza el modelo se pueda hacer un mejor uso del mismo.

Séptimo, en el anexo 3 se encuentran las convenciones de todos los subíndices, parámetros y variables que son utilizados en el modelo.

Octavo, es importante cuando se lleve a cabo una simulación con este modelo, revisar que el número de variables sea igual al número de ecuaciones linealmente independientes¹³. Si lo anterior no se cumple, entonces el modelo puede estar subidentificado o sobreidentificado¹⁴.

¹³ Una forma sencilla de verificar en GAMS que el número de variables es igual al número de ecuaciones consideradas en el modelo es comparando en el archivo de salida (el archivo que tiene la extensión *lst*) los valores que aparecen en la instrucción *SINGLE EQUATIONS* con los valores que aparecen en la instrucción *SINGLE VARIABLES*. Recuerde que ambas instrucciones aparecerán el mismo número de veces que es ejecutado el algoritmo de solución. Nota: Tenga en cuenta que la instrucción *SINGLE EQUATIONS* le comenta cuantas ecuaciones tiene el modelo (no cuantas son linealmente independientes)

¹⁴ Asimismo, si va a incluir una nueva ecuación dentro del modelo (y por consiguiente una nueva variable), revise que esta ecuación no sea linealmente dependiente con respecto al resto de ecuaciones que en este aparecen.

Por último, en los recuadros que aparecen en las siguientes subsecciones se encuentran las ecuaciones que fueron utilizadas dentro de la programación del modelo. Compare estas ecuaciones con los códigos de *GAMS* que acompañan el documento, en particular remítase al archivo *estructura.gms*.¹⁵

La estructura del modelo se va a explicar en varias subsecciones. En la primera, se explican las ecuaciones que involucran la estructura de producción de la economía. En la segunda, se desarrollan las ecuaciones que determinan los esquemas de oferta y de demanda de bienes en el modelo. En la tercera, se analizan las ecuaciones de ingresos, gastos, ahorro e inversión de los diferentes agentes institucionales que interactúan en el modelo. Posteriormente, en la cuarta, se establecen los equilibrios del mercado que no se hayan desarrollado en las subsecciones anteriores. En la quinta, se determinan las ecuaciones de los índices de precios y del PIB. Finalmente, en la última subsección se establecen los cierres del modelo.

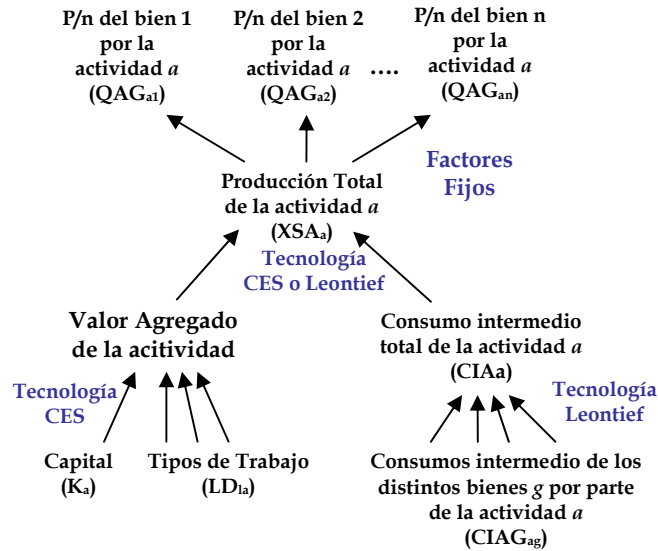
2.1. Producción. La producción adelantada por las empresas pertenecientes a la actividad *a* se lleva a cabo siguiendo la estructura tecnológica representada en el gráfico 1 la cual se puede explicar en palabras de la siguiente forma: Cada una de las diferentes empresas pertenecientes a la actividad *a* utiliza factores de producción (capital, trabajo e insumos intermedios)¹⁶ para producir diferentes tipos de bienes *g*.

¹⁵ Asimismo, observe que en estos recuadros se especifica el nombre que la ecuación tiene en el código y la variable que vendría determinada por esta. Claro esta que dependiendo de los cierres del modelo, ver sección 2.6, una misma ecuación podría determinar variables diferentes.

¹⁶ La combinación del capital con los diferentes tipos de trabajo constituye el valor agregado utilizado por la actividad *a*.

Una opción que también se podría haber considerado en la formulación del modelo es dividir el capital entre capital específico y capital no específico o entre capital público y capital privado (esto último es lo que se hace en Perdomo (2005)). El hacer cualquiera de las dos divisiones planteadas, computacionalmente y en términos de modelación, no tiene mayor problema; sin embargo, esta información no se encuentra en forma explícita dentro de la información utilizada para alimentar el modelo, por lo tanto se tomo la decisión de no dividir el capital en este documento.

Gráfico 1
Estructura de producción de la actividad *a*



Por lo tanto, al momento de adelantar la producción, el productor de la actividad *a* se ve enfrentado a tomar diferentes decisiones. En particular, tiene que determinar cuál va a ser su producción total, cuánto va a producir de cada uno de los bienes *g* y cuántos factores de producción va a utilizar.

En consecuencia, el productor de la actividad *a* tiene que resolver varios problemas de optimización entre los que se encuentra el siguiente¹⁷:

$$\underset{VA_a, CIA_a}{Max} \text{ Beneficio}_a = \text{Ingresos}_a - \text{Costos}_a = P_a XSA_a (1 - TV_a) - PVA_a VA_a - PCIA_a CIA_a$$

$$s.a. \quad XSA_a = \min\{iova_a VA_a, ioci_a CIA_a\} \quad \text{ó} \quad XSA_a = \alpha_{3a} \left\{ [\delta_{3a} VA_a^{-\rho_{3a}}] + [(1 - \delta_{3a}) CIA_a^{-\rho_{3a}}] \right\}^{-1/\rho_{3a}}$$

XSAEQ1(a), XSAEQ2(a): De las restricciones o de las condiciones de primer orden del anterior problema de optimización, según sea el caso, se obtiene la ecuación que

¹⁷ Se asume que el productor de la actividad *a*, al momento de resolver este problema, sólo puede utilizar una tecnología CES o una tecnología Leontief.

determina la producción total de la actividad a :

Tecnología Leontief: **(1a)** $XSA_a \rightarrow XSA_a = ioci_a CIA_a$

Tecnología CES: **(1b)** $XSA_a \rightarrow XSA_a = \alpha_{3a} \left\{ \left[\delta_{3a} VA_a^{-\rho_{3a}} \right] + \left[(1 - \delta_{3a}) CIA_a^{-\rho_{3a}} \right] \right\}^{-1/\rho_{3a}}$

CIAEQ1(a), CIAEQ2(a): Asimismo, la demanda por consumo intermedio total que hace la actividad a se obtiene de resolver el problema anterior¹⁸:

Tecnología Leontief: **(2a)** $CIA_a \rightarrow \frac{CIA_a}{iova_a} = \frac{VA_a}{ioci_a}$

Tecnología CES: **(2b)** $CIA_a \rightarrow \frac{CIA_a}{VA_a} = \left[\frac{1 - \delta_{3a}}{\delta_{3a}} \right]^{\sigma_{3a}} \left[\frac{PVA_a}{PCIA_a} \right]^{\sigma_{3a}}$

Por otra parte, dado que estamos en una situación de competencia perfecta, entonces el productor de la actividad a va a obtener beneficios nulos, y por lo tanto:

$$Beneficio_a = 0 = P_a XSA_a (1 - TV_a) - PVA_a VA_a - PCIA_a CIA_a$$

En otras palabras, el valor total de la producción de la actividad a va a ser destinado para pagar impuestos indirectos netos a la producción, consumo intermedio y valor agregado.

PVAEQ(a): Reordenando la anterior relación se obtiene la ecuación que dentro del sistema nos va a permitir determinar el precio implícito del valor agregado que paga la actividad a :

$$(3) PVA_a \rightarrow PVA_a VA_a = P_a XSA_a (1 - TV_a) - PCIA_a CIA_a$$

¹⁸ Ver en el anexo 2 las ecuaciones de solución para las funciones Leontief y CES con dos variables explicativas.

Por otra parte, el productor de la actividad a tiene que decidir cuántas unidades del bien g va a utilizar como consumo intermedio. Entonces, en este punto se asume que la tecnología que relaciona el consumo intermedio sectorial con el consumo intermedio total es Leontief, por lo tanto el problema de optimización que tiene que resolver el productor es:

$$\text{Max}_{CIG_{ag}} \quad PCIA_a CIA_a - \sum_g PCIG_{ga} CIG_{ga} \quad \text{s.a.} \quad CIA_a = \min\{\varepsilon_{1a} CIG_{1a}, \dots, \varepsilon_{na} CIG_{na}\}$$

Este problema daría como resultado que

$$CIA_a = \varepsilon_{1a} CIG_{1a} = \dots = \varepsilon_{na} CIG_{na}$$

Nota: Para no incluir tantas variables dentro del sistema se decidió dentro de la programación no poner en forma explícita ni $PCIG_{ag}$ ni $CIAG_{ag}$. Sin embargo, estos valores son fáciles de encontrar dado que son proporciones fijas con respecto a otras variables dentro del sistema.

No obstante, en este punto se puede determinar cuál es la oferta para consumo intermedio que hace la economía del bien g y cuál es el precio implícito del consumo intermedio total que utiliza la actividad a

$CIGEQ(g)$: La oferta para consumo intermedio que hace la economía del bien g es igual a la suma ponderada de la demanda del mismo que hacen cada una de las actividades.

$$(4) \quad CIG_g \rightarrow CIG_g = \sum_a (\varepsilon_{ga} CIA_a)$$

$PCIAEQ(a)$: Por su parte, el precio implícito del consumo intermedio que utiliza la actividad a es el promedio ponderado del precio de los bienes que ésta utiliza como

consumo intermedio

$$(5) PCIA_a \rightarrow PCIA_a = \sum_g (\varepsilon_{ga} PQD_g)$$

Asimismo, el productor de la actividad a tiene que decidir cuánto valor agregado va a utilizar, es decir cuánto de los diferentes tipos de trabajo y capital va a demandar. En este punto, el problema que tiene que resolver el productor es:

$$\underset{K_a, LD_{la}}{\text{Max}} PVA_a VA_a - K_a R - \sum_l LD_{la} w_l \quad s.a. \quad VA_a = \alpha_{4a} \left\{ \left[\sum_l \delta_{4al}^L LD_{al}^{-\rho_{4a}} \right] + \delta_{4a}^K K_a^{-\rho_{4a}} \right\}^{-1/\rho_{4a}}$$

VAEQ(a): De la restricción del anterior problema se obtiene la ecuación que determina la cantidad utilizada de valor agregado por parte de la actividad a :

$$(6) VA_a = \alpha_{4a} \left\{ \left[\sum_l \delta_{4al}^L LD_{al}^{-\rho_{4a}} \right] + \delta_{4a}^K K_a^{-\rho_{4a}} \right\}^{-1/\rho_{4a}}$$

KEQ(a), LDEQ(l,a): Asimismo, la demanda por capital y por los diferentes tipos de trabajo que hace la actividad a se obtiene de resolver el anterior problema de optimización¹⁹:

$$(7) K_a \rightarrow R = PVA_a VA_a \left\{ \left[\sum_l \delta_{4al}^L \times LD_{al}^{-\rho_{4a}} \right] + \delta_{4a}^K K_a^{-\rho_{4a}} \right\}^{-1} \delta_{4a}^K K_a^{-\rho_{4a}-1}$$

$$(8) LD_{al} \rightarrow W_l = PVA_a VA_a \left\{ \left[\sum_l \delta_{4al}^L \times LD_{al}^{-\rho_{4a}} \right] + \delta_{4a}^K K_a^{-\rho_{4a}} \right\}^{-1} \delta_{4al}^L LD_{al}^{-\rho_{4a}-1}$$

¹⁹ A partir de lo expuesto en el anexo 2 se pueden intuir estas ecuaciones.

Por otra parte, se va a asumir que los diferentes bienes g son producidos en proporciones fijas por parte de la actividad a ²⁰

$QAGEQ(a,g)$: En consecuencia, la producción del bien g por parte de la actividad a viene representada por:

$$(9) QAG_{ag} \rightarrow QAG_{ag} = \theta_{ag} XSA_a$$

Dado que la producción que hace la actividad a de cada uno de los bienes g es de proporciones fijas, entonces el precio implícito de la producción adelantada por la actividad a es el promedio ponderado del precio de cada uno de los bienes g que esta produce.

$PEQ(a)$: Por consiguiente, el precio implícito de la actividad a viene representada por:

$$(10) P_a \rightarrow P_a = \sum_g (\theta_{ag} PAG_{ag})$$

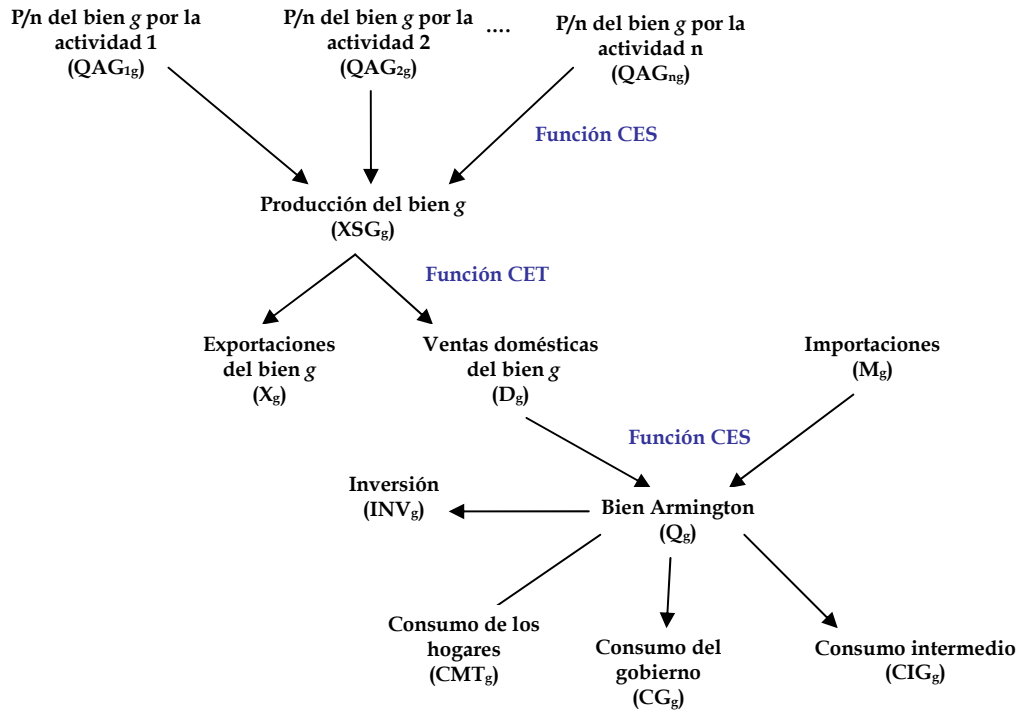
2.2. Oferta y demanda de bienes. En esta sección se explica la forma como los vendedores y los compradores toman sus decisiones dentro del mercado. En el gráfico 2 se pueden apreciar las formas funcionales utilizadas en esta parte del modelo.

2.2.1. Oferta de bienes. Se asume que cada uno de los bienes g producidos por las diferentes actividades son considerados como sustitutos imperfectos dentro del mercado. En consecuencia, los agentes económicos al momento de escoger de cuál actividad compran un determinado bien tienen que resolver el siguiente problema de optimización:

²⁰ Esto se hace así dado que este supuesto permite respetar en forma sencilla uno de los supuestos que esta presente en todas las matrices de contabilidad social bienes-actividades en donde la mayor producción de una actividad es de aquellos bienes que le dan el nombre a dicha actividad (por ejemplo, el principal bien producido por la actividad que se llama café es café). Se hubiera podido utilizar otro tipo de forma funcional más complicada en esta etapa de decisión por parte del productor; sin embargo, no era el propósito del modelo y se opto por utilizar el mismo camino que siguen Löfgren et al. (2002) y McDonald (2005).

Gráfico 2

Estructura de oferta y de demanda del bien g



$$\text{Max}_{QAG_{ag}} \quad PB_g XSG_g - \sum_a PAG_{ag} QAG_{ag} \quad \text{s.a.} \quad XSG_g = \alpha_{5g} \left\{ \sum_a \left[\delta_{5ag} QAG_{ag}^{-\rho_{5g}} \right] \right\}^{-1/\rho_{5g}}$$

$PAGEQ(a,g)$: Entonces, el precio del bien g ofertado por la actividad a se obtiene a partir de las condiciones de primer orden del problema de optimización:

$$(11) \quad PAG_{ag} \rightarrow PAG_{ag} = PB_g XSG_g \left(\sum_a \delta_{5ag} QAG_{ag}^{-\rho_{5g}} \right)^{-1} \delta_{5ag} QAG_{ag}^{-(\rho_{5g}+1)}$$

En cuanto a las cantidades producidas de cada uno de los bienes se va a asumir que algunos de los bienes g son de oferta fija porque existen restricciones tecnológicas y/o de mercado que van a llevar a que su producción siempre sea la misma²¹.

XSGEQ(g), XSGFIX(g): Por consiguiente, la oferta total del bien g viene representada por alguna de las siguientes ecuaciones:

$$(12a) \quad XSG_g \rightarrow XSG_g = \alpha_{5g} \left\{ \sum_a [\delta_{5ag} QAG_{ag}^{-\rho_{5g}}] \right\}^{-1/\rho_{5g}}$$

$$(12b) \quad XSG_g \rightarrow XSG_g = XSG\theta_g$$

Definida cuál va a ser la oferta de los bienes g entonces quedaría por explicar cómo se determina el destino de los mismos, ya sea para el mercado interno (ventas domésticas) o para el mercado externo (exportaciones).

El proceso de optimización de quién vende el bien g en cualquiera de los dos mercados es:

$$\underset{DD_g, EX_g}{Max} \text{ Ventas}_g = \text{Producción}_g = PB_g XSG_g = PD_g D_g + PE_g EX_g$$

$$s.a. \quad XSG_g = \alpha_{1g} \left[(\delta_{1g} EX_g^{\rho_{1g}}) + ((1 - \delta_{1g}) D_g^{\rho_{1g}}) \right]^{1/\rho_{1g}}, PE_g = PWE_g e$$

²¹ Por ejemplo, los bienes mineros están restringidos tecnológicamente por la cantidad de producto que se pueda extraer de un pozo o de una mina en un periodo determinado. Asimismo, también están restringidos por el mercado a partir de los acuerdos comerciales que ya se tengan firmados. Por otra parte, puede existir un gremio que especifique de antemano cuáles son las cantidades de producto que se van a producir o vender en un momento dado (por ejemplo, en el caso del café colombiano esta función es llevada a cabo por la Federación Nacional de Cafeteros).

Observe, que en el código del modelo se puede escoger cuáles bienes son de oferta fija. Donde una opción factible sería que no hay bienes de oferta fija.

Tenga en cuenta que si el vendedor sólo utiliza un único destino (mercado interno o mercado externo) para su producto, entonces el precio de venta y las cantidades vendidas van a ser iguales al precio y a las cantidades del bien dirigido a ese único destino.

DEQ1(g), DEQ2(g): Por consiguiente, la producción cuyo destino es el mercado doméstico se puede calcular a partir de la siguiente ecuación, si el bien en cuestión también es de exportación:

$$(13a) D_g \rightarrow XSG_g = \alpha_{1g} \left[\left(\delta_{1g} EX_g^{\rho_{1gr}} \right) + \left((1 - \delta_{1g}) D_g^{\rho_{1gr}} \right) \right]^{1/\rho_{1gr}}$$

O por esta ecuación si el bien sólo tiene como destino el mercado doméstico:

$$(13b) D_g \rightarrow XSG_g = D_g$$

EXEQ1(g), EXEQ2(g) : Por otra parte, las exportaciones estarían determinadas por la siguiente ecuación, si el bien en cuestión también tiene como destino el mercado doméstico:

$$(14a) EX_g \rightarrow \frac{EX_g}{D_g} = \left(\frac{PE_g}{PD_g} \right)^{\sigma_{1g}} \left(\frac{1 - \delta_{1g}}{\delta_{1g}} \right)^{\sigma_{1g}}$$

O por esta ecuación si el bien sólo tiene como destino el mercado externo²²:

$$(14b) EX_g \rightarrow XSG_g = EX_g$$

PBEQ(g): Del problema anteriormente planteado se sabe que el valor de la producción del

²² Observe que la ecuación (14b) no es operativa al hacer simulaciones para Colombia con el modelo porque dentro de la matriz de contabilidad social 2005 de Corredor y Pardo (2008) ningún bien es sólo de exportación

país es la suma del valor de la producción que va al mercado doméstico y al mercado externo. Por consiguiente el precio del bien g producido en la economía se puede calcular a partir de:

$$(15) PB_g \rightarrow PB_g XSG_g = PD_g D_g + PE_g EX_g$$

PEEQ(g): Asimismo, se sabe que el precio doméstico del bien g exportado es su precio mundial multiplicado por la tasa de cambio

$$(16) PE_g \rightarrow PE_g = PWE_g e$$

2.2.2. Demanda de bienes. La demanda de bienes hecha para el consumo de los hogares, el gobierno y las empresas (consumo intermedio) o para inversión esta constituida por bienes compuestos Armington²³ los cuales están conformados en parte por producción proveniente de los mercados internos (ventas domésticas) y en parte por producción proveniente de los mercados externos (importaciones). En consecuencia, el problema que tienen que resolver los consumidores es:

$$Max_{D_g, M_g} Compras_g = PQD_g Q_g = (PD_g D_g - PM_g M_g) \times (1 + TVA_g + TYIP_g + TSUB_g) \quad s.a.$$

$$PM_g = PWM_g (1 + TM_g) e, \quad PQD_g = PQS_g (1 + TVA_g + TYIP_g + TSUB_g)$$

$$Q_g = \alpha_{2g} \left\{ (\delta_{2g} M_g)^{-\rho_{2g}} + [(1 - \delta_{2g}) D_g]^{-\rho_{2g}} \right\}^{-1/\rho_{2g}}$$

QEQ1(g), QEQ2(g), QEQ3(g): Por lo tanto, del anterior problema de optimización se deduce que las cantidades consumidas de cada uno de los bienes compuestos Armington

²³ Estos bienes deben su nombre a Paul Armington quien fue el primero en utilizar funciones de sustituibilidad imperfecta entre importaciones y exportaciones dentro de sus modelos (Löfgren, et. al. 2002).

viene determinada por alguna de estas tres relaciones:

Si el bien proviene tanto del mercado interno como del externo la ecuación es

$$(17a) Q_g \rightarrow Q_g = \alpha_{2g} \left\{ (\delta_{2g} M_g)^{-\rho_{2g}} + [(1 - \delta_{2g}) D_g]^{-\rho_{2g}} \right\}^{-1/\rho_{2g}}$$

Si el bien proviene sólo del mercado doméstico la ecuación es

$$(17b) Q_g \rightarrow Q_g = D_g$$

Si el bien proviene sólo del mercado externo la ecuación es²⁴

$$(17c) Q_g \rightarrow Q_g = M_g$$

MEQ(g): De las condiciones de primer orden del anterior problema de optimización se obtiene la demanda de importaciones

$$(18) M_g \rightarrow \frac{M_g}{D_g} = \left(\frac{\delta_{2g}}{1 - \delta_{2g}} \right)^{\sigma_{2g}} \left(\frac{PD_g}{PM_g} \right)^{\sigma_{2g}}$$

PQSEQ(g), PQDEQ(g): Por otra parte, de la restricción del problema de optimización se puede obtener una ecuación para determinar el precio del bien compuesto Armington g sin incluir impuestos

$$(19) PQS_g \rightarrow PQS_g Q_g = PD_g D_g + PM_g M_g$$

²⁴ Observe que la ecuación (17c) no es operativa al hacer simulaciones para Colombia con el modelo porque dentro de la matriz de contabilidad social 2005 de Corredor y Pardo (2008) ningún bien es sólo de importación

y otra para el precio del bien compuesto Armington incluyendo impuestos

$$(20) PQD_g \rightarrow PQD_g = PQS_g (1 + TIVA_g + TYIP_g + TSUB_g)$$

PMEQ(g): Por último se puede determinar el precio de las importaciones como el precio mundial multiplicado por la tasa de cambio y ajustado por el pago de aranceles:

$$(21) PM_g \rightarrow PM_g = PWM_g (1 + TM_g)e$$

2.2.3. Márgenes de comercio y de transporte. Uno de los aspectos que se destaca del SCN 93 de las Naciones Unidas y por consiguiente de las Cuentas Nacionales de Colombia es la forma como son contabilizados los márgenes de comercio y de transporte: a partir de los estas cuentas se puede apreciar tres cosas. Primero, los márgenes de comercio son pagados a la actividad comercio durante el proceso de compra y venta de bienes que adelantan el resto de actividades. Segundo, los márgenes de transporte son pagados a la actividad transporte terrestre por concepto del transporte de bienes que adelantan el resto de actividades²⁵. Por último, según los equilibrios oferta-utilización del DANE ambos márgenes tienen que ser cobrados tanto por la demanda interna (importaciones y ventas domésticas proveniente de producción domestica) como por las exportaciones.

Por otra parte, ambos tipos de márgenes se van a modelar como si fueran *iceberg costs*, en consecuencia el pago que se hace por la comercialización o por el transporte de un bien se va a suponer que es un porcentaje del valor de dicho bien:

MGCDEQ(g), MGTDEQ(g): Entonces, para el bien doméstico

²⁵ Dependiendo del tipo de agregación sectorial que se utilice en una determinada simulación, las actividades de comercio y transporte terrestre pueden estar agregadas en un rubro con diferente nombre al de éstas actividades.

los márgenes de comercio son (excepto para el actividad de comercio),

$$PD_g MGC_D_g = \psi^{C1} PD_g DD_g \Rightarrow (22) MGC_D \rightarrow MGC_D_g = \psi^{C1} DD_g$$

y los márgenes de transporte son (excepto para la actividad de transporte terrestre)

$$PD_g MGT_D_g = \psi^{T1} PD_g DD_g \Rightarrow (23) MGT_D \rightarrow MGT_D_g = \psi^{T1} DD_g$$

MGCMEQ(g), MGTMEQ(g): : Por otra parte, para el bien *g* que es importado

los márgenes de comercio son,

$$PWM_g eMGC_M_g = \psi^{C2} PWM_g eM_g \Rightarrow (24) MGC_M_g \rightarrow MGC_M_g = \psi^{C2} M_g$$

y los márgenes de transporte son,

$$PWM_g eMGT_M_g = \psi^{T2} PWM_g eM_g \Rightarrow (25) MGT_M_g \rightarrow MGT_M_g = \psi^{T2} M_g$$

MGCXEQ(g), MGTXEQ(g): Finalmente, para el bien *g* que es exportado

los márgenes de comercio son,

$$PWE_g eMGC_X_g = \psi^{C3} PWE_g eEX_g \Rightarrow (26) MGC_X_g \rightarrow MGC_X_g = \psi^{C3} EX_g$$

y los márgenes de transporte son,

$$PWE_g eMGT_X_g = \psi^{T3} PWE_g eEX_g \Rightarrow (27) MGT_X_g \rightarrow MGT_X_g = \psi^{T3} EX_g$$

Dado que una de las actividades cobra los márgenes de comercio que son pagados por el resto de actividades, entonces por definición la suma agregada de los márgenes de comercio es cero. Algo similar ocurre con los márgenes de transporte.

MGCEQ, MGTEQ: Entonces,

el recaudo total de márgenes de comercio que hace la actividad de comercio viene dado por la siguiente ecuación

$$(28) \quad MGC_D_{\text{"comercio"}} \rightarrow 0 = \sum_g \left[(PD_g MGC_D_g) + (PWM_g eMGC_M_g) + (PE_g MGC_X_g) \right]$$

y el recaudo total de márgenes de transporte que hace la actividad de transporte terrestre viene determinado por

$$(29) \quad MGT_D_{\text{"Transp.Terr"}} \rightarrow 0 = \sum_g \left[(PD_g MGT_D_g) + (PWM_g eMGT_M_g) + (PE_g MGT_X_g) \right]$$

Conocidos los montos pagados por concepto de márgenes de comercio y de transporte entonces se puede calcular el valor de las ventas al mercado doméstico, importaciones y exportaciones incluyendo el pago de estos márgenes.

$$DEQ(g): PD_g D_MG_g = PD_g (D_g + MGC_D_g + MGT_D_g)$$

$$(30) \quad D_MG_g \rightarrow D_MG_g = D_g + MGC_D_g + MGT_D_g$$

$$EX_MGEQ(g): PWE_g eEX_MG_g = PWE_g (EX_g + MGC_X_g + MGT_X_g)$$

$$\Rightarrow (31) \quad EX_MG_g \rightarrow EX_MG_g = EX_g + MGC_X_g + MGT_X_g$$

$$M_MGEQ(g): PWM_g eM_MG_{gt} = PWM_g e(M_{gt} + MGC_M_{gt} + MGT_M_{gt})$$

$$(32) M_MG_{gt} \rightarrow M_MG_{gt} = M_{gt} + MGC_M_{gt} + MGT_M_{gt}$$

2.3. Ingresos, gasto, ahorro e inversión. En la economía todos los agentes tienen tanto ingresos como gastos, y de la diferencia de estos dos surge un ahorro.

2.3.1. Hogares: El ingreso total del hogar h viene representado por salarios, rendimientos de capital y transferencias recibidas del resto de la economía²⁶. Donde los primeros son una fracción del ingreso total de la economía por cada tipo de trabajo l y los segundos corresponden a una participación de los rendimientos del capital.

YHEQ(h): Por consiguiente, el ingreso total del hogar h viene dado por la siguiente ecuación:

$$(33) YH_{ht} \rightarrow YH_{ht} = \left(\sum_l \chi_{lh} WL_{lt} \right) + \left(\lambda_h \sum_a R_a K_{at} \right) + (TR_H_h + TGH_{ht} + TEH_{ht}) PINDEX1_t$$

WLEQ(l): donde, el valor de la remuneración agregada por tipo de trabajo l es la suma de las remuneraciones individuales que pagan cada una de las actividades:

$$(34) WL_l \rightarrow WL_l = \sum_a W_l LD_{la}$$

El ahorro del hogar h se calcula como una proporción del ingreso disponible. Donde este último es el ingreso total del hogar h descontados los impuestos al ingreso que le son cobrados.

²⁶ Observe que todas las transferencias en el modelo, sin importar su origen o procedencia, son valoradas de acuerdo al índice de precios de la economía.

YHDEQ(h): En consecuencia, el ingreso disponible del hogar h se calcula a partir de:

$$(35) YDH_h \rightarrow YDH_h = YH_h(1 - TYM_h)$$

SHEQ(h): y el ahorro del hogar h viene dado por:

$$(36) SH_h \rightarrow SH_h = YDH_h pms_h Sadj$$

Por su parte, el consumo del hogar h se haya como el residuo entre el ingreso disponible con respecto al ahorro y las transferencias hechas al resto de la economía

CMEQ(h): Entonces, el consumo total del hogar h esta representado por:

$$(37) CM_h \rightarrow CM_h = YDH_h - SH_h - (THE_h + THG_h + TRH_{-h})PINDEX1$$

Por otro lado, se asume que los consumidores deciden cuánto consumen de cada uno de los bienes resolviendo el siguiente problema de optimización²⁷:

$$\underset{VA_a, CIA_a}{Max} Utilidad_h = \prod_g CMG_{hg}^{\beta_{hg}} \quad s.a. \quad CM_h = \sum_g PQD_g CMG_{hg}$$

Este problema daría como resultado que el consumo que hace el hogar h del bien g viene dado por²⁸:

$$CMG_{hg} = \frac{\beta_{hg} CM_{ht}}{PQD_g}$$

Nota: Para no incluir tantas variables dentro del sistema se decidió dentro de la programación del modelo no poner en forma explícita los CMG_{hg} . Sin embargo, estos

²⁷ Para este problema se esta asumiendo que la función de utilidad es una función Cobb-Douglas. Sin embargo, se podría utilizar otro tipo de funciones como la ELES, LES, AIDS, entre otras.

²⁸ Ver anexo 2

valores son fáciles de encontrar a partir de la ecuación de arriba.

CMTEQ(g): Conocido el consumo que hacen cada uno de los hogares h del bien g , entonces se puede determinar el consumo agregado que los hogares hacen del bien g , a partir de:

$$(38) CMT_g \rightarrow PQD_g CMT_g = \sum_H (\beta_{hg} CM_h)$$

2.3.2. Empresas: El ingreso total de las firmas viene representado por la suma de los ingresos de capital y transferencias recibidas del resto de la economía. Donde los primeros corresponden a una participación del rendimiento del capital.

YEEQ: Por consiguiente, el ingreso total de las empresas se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$(39) YE \rightarrow YE = \left(\lambda_3 \sum_a RK_a \right) + \left(TR_{-E} + \sum_h THE_h \right) PINDEX1$$

El ahorro de las empresas se haya como el residuo de los ingresos menos los gastos, donde estos últimos corresponden al pago de impuestos al ingreso y al pago de transferencias hechas al resto de la economía.

SEEQ: Por lo tanto,

$$(40) SE \rightarrow SE = YE - (TYE \times YE) - \left\{ \left(\sum_h TEH_h \right) + TRE_{-} \right\} PINDEX1$$

2.3.3. Gobierno: Los ingresos del gobierno provienen del recaudo de impuestos (al ingreso de los hogares, al ingreso de las firmas, al proceso productivo y a las importaciones)²⁹, de los ingresos de capital y de las transferencias que este percibe. Al igual que con los hogares y con las empresas, los ingresos de capital son una participación de los rendimientos del capital que se dan en la economía.

YGEQ: Entonces, el ingreso total del gobierno están representados por la siguiente ecuación:

$$(41) YG \rightarrow YG = \left(\sum_H TYM_H YH_H \right) + \left(\sum_a TV_a P_a XSA_a \right) + \lambda_2 \left(\sum_a RK_a \right) + (TYE \times YE) \\ + \left(\sum_g (TYIP_g + TSUB_g + TIVA_g) PQS_g Q_g \right) + \left[\sum_g TM_g PWM_g \times e \times M_g \right] \cdot \\ + \left(TR_G + \sum_h THG_h \right) PINDEX 1$$

Dentro de la programación, los impuestos que cobra el gobierno son controlados por intermedio de variables de holgura³⁰ para así poder hacer simulaciones de *tax replacement*: En la sección 2.6.5 se explica cómo operan las variables de holgura en cierres alternativos.

TYIPEQ(g): Tasa de los impuestos directos al producto *g*

$$(42) TYIP_g \rightarrow TYIP_g = TYIP0_g (TAXTYIPG_g TAXTYIP) TAXES$$

²⁹ Esta clasificación tributaria es la que se encuentra en la matriz de contabilidad social de Corredor y Pardo (2008)

³⁰ Una variable de holgura es una variable que por si sola no tiene significado económico y puede estar fija o móvil en una simulación dependiendo del tipo de cierre que se quiera implementar en el modelo. Por ejemplo, en la ecuación (42) las variables $TAXTYIPG_g$, $TAXTYIP$ y $TAXES$ son variables de holgura. Si a todas se les establece que son iguales a 1, entonces dentro de la simulación los impuestos directos al producto *g* van a ser constantes e iguales a $TYIP0_g$

TVEQ(a): Tasa de los impuestos indirectos netos a la producción que paga la actividad *a*

$$(43) TV_a \rightarrow TV_a = TV0_a (TAXTVA_g TAXTV) TAXES$$

TIVAEQ(g): Tasa impositiva al valor agregado en la producción de *g*

$$(44) TIVA_g \rightarrow TIVA_g = TIVA0_g (TAXTIVAG_g TAXTIVA) TAXES$$

TSUBEQ(g): Tasa de los subsidios directos al producto *g*

$$(45) TSUB_g \rightarrow TSUB_g = TSUB0_g (TAXTSUBG_g TAXTSUB) TAXES$$

TYMEQ(h): Tasa de los impuestos directos al ingreso del hogar *h*

$$(46) TYM_h \rightarrow TYM_h = TYM0_h (TAXTYMH_h TAXTYM) TAXES$$

TYEEQ: Tasa de los impuestos directos a los ingresos de las empresas

$$(47) TYE \rightarrow TYE = TYE0 (TAXTYE) TAXES$$

TMEQ(g): Tasa arancelaria al producto *g*

$$(48) TM_g \rightarrow TM_g = TM0_g (TAXTMG_g TAXTM) TAXES$$

El ahorro del gobierno se calcula como el residuo entre los ingresos menos los gastos del gobierno. Estos últimos son en consumo de bienes y en transferencias hechas al resto de la economía.

SGEQ: Por lo tanto,

$$(49) \text{ SG o CGadj} \rightarrow SG = YG - \sum_g PQD_g CG_g - \left\{ \left(\sum_H TGH_H \right) + TRG_- \right\} PINDEX1$$

CGEQ: Por su parte, el consumo del bien g por parte del gobierno viene determinado por

$$(50) \text{ CG}_g \rightarrow CG_g = CG0_g \text{ CGadj}$$

SGFEQ: Asimismo, el ahorro como porcentaje del PIB se define como,

$$(51) \text{ SGF o SG} \rightarrow SGF = \frac{SG}{PIB}$$

CGFEQ: Y el consumo del gobierno como porcentaje del PIB es,

$$(52) \text{ CGF o CGadj} \rightarrow CGF = \frac{\sum_g PQD_g CG_g}{PIB}$$

2.3.4. Sector Externo. En cuanto al sector externo la balanza en cuenta corriente se define como exportaciones menos importaciones más transferencias netas.

BALC: Por consiguiente, la ecuación de la balanza en cuenta corriente es

$$(53) \text{ BC o e} \rightarrow eBC = \left(\sum_g EX_- MG_g PWE_g e \right) - \left(\sum_g M_g PWM_g e \right) + PINDEX (TRRM_- - TR_- RM)$$

A partir de esta ecuación dependiendo del cierre se determina la tasa de cambio nominal o la balanza en cuenta corriente.

BOCEQ: Por su parte, la balanza en cuenta corriente como porcentaje del PIB es

$$(54) \quad BOC \rightarrow BOC = \frac{eBC}{PIB}$$

2.3.5. Inversión. El comportamiento de la demanda por inversión del bien g va a ser constante en $INV0_g$ o variable dependiendo del cierre ahorro-inversión

INVEQ: La ecuación que determina el nivel de demanda por inversión del bien g es:

$$(55) \quad INV_g \rightarrow INV_g = INV0_g \text{ INVadj}$$

2.4. Equilibrios de mercado. Los mercados se equilibran cuando la oferta es igual a la demanda, por lo tanto en el modelo se tienen en cuenta varios equilibrios los cuales van a servir para determinar algunos precios.

PDEQ(g): Por un lado, la igualdad entre la oferta y la demanda del bien compuesto Armington va a servir para determinar el precio del bien g producido que se vende en el mercado doméstico

$$(56) \quad PD_g \rightarrow$$

$$Q_g + \left[(MGC_{-D_g} + MGT_{-D_g}) \left(\frac{PD_g}{PQD_g} \right) \right] + \left[(MGC_{-M_g} + MGT_{-M_g}) \left(\frac{PWM_g e}{PQD_g} \right) \right] =$$

$$CMT_g + CG_g + CIG_g + INV_g$$

REQ: La remuneración pagada por cada unidad de capital utilizada se determina a partir de la igualdad entre la oferta y la demanda de capital

$$(57) \quad R \rightarrow K = \sum_a K_a$$

WEQ(l): La remuneración pagada por cada unidad del tipo de trabajo l utilizado se determina a partir de la igualdad entre la oferta y la demanda de este tipo de trabajo

$$(58) W_l \rightarrow LS_l = \sum_a LD_{al}$$

2.5. Otras variables. En el modelo también aparecen reportadas otra serie de variables que son relevantes para el análisis económico. En particular se reportan los índices de precios al consumo y al productor, el PIB nominal y el PIB real.

IPC: El índice de precios al consumo se define como³¹:

$$(59) Sadj \text{ o } INVadj \rightarrow PINDEX1 = \sum_g \beta_{-X_{1g}} PQD_g$$

IPP: El índice de precios al productor se define como:

$$(60) PINDEX2 \rightarrow PINDEX2 = \sum_g \beta_{-X_{2g}} PD_g$$

PIBEQ1: El PIB nominal se define como:

$$(61) PIB \rightarrow PIB = \sum_g PQD_g (CMT_g + CG_g + INV_g) + \sum_g (PWE_g eEX_{-MG_g}) - \sum_g (PWM_g eM_g)$$

PIBEQ2: El PIB real se define como:

$$(62) PIBR \rightarrow PIBR = PIB / PINDEX1$$

OBJ.. Finalmente, se incluye una variable *dummy* que no tiene ningún significado

³¹ Esta ecuación determina las variables *Sadj* o *INVadj* porque como se vera más adelante, el índice de precios al consumo se escogió como precio numerario por lo que siempre va a ser igual a uno.

económico y cuyo único fin es permitir el funcionamiento del algoritmo de solución del modelo³²:

$$(63) \Omega \rightarrow \Omega = 0$$

2.6. Cierres finales. A continuación se presentan una serie de relaciones las cuales van a permitir terminar con la especificación del modelo.

2.6.1. Numerario. Todos los modelos de equilibrio general computable especifican un precio numerario. Para nuestro caso el precio numerario se va a asumir que es el índice de precios al consumo³³.

$$(64) PINDEX1 \rightarrow PINDEX1 = PINDEX0$$

2.6.2. Cierre externo: A continuación se presentan los cierres externos más tradicionales³⁴.

$$(65) \left\{ \begin{array}{l} a) BC \rightarrow BC = BC0 \\ b) e \rightarrow e = e0 \\ c) BOC \rightarrow BOC = BOC0 \end{array} \right\}$$

Sin embargo, ello no imposibilita que el modelador utilice otro tipo de cierres; por ejemplo, se puede asumir que la balanza en cuenta corriente nominal y como porcentaje

³² Esta variable va a ser de utilidad para aquellos que buscan resolver el problema en GAMS utilizando un algoritmo de programación no lineal (tal como aparece en el código adjunto al documento).

³³ Si el modelador lo desea, a partir del código, puede escoger otro precio numerario.

³⁴ Si se usa el cierre de la ecuación (65a) entonces e es resuelto por la ecuación (53) y BOC es resuelto por la ecuación (54). Si se usa el cierre de la ecuación (65b) entonces BC es resuelto por la ecuación (53) y BOC es resuelto por la ecuación (54). Si se usa el cierre de la ecuación (65c) entonces e es resuelto por la ecuación (53) y BCC es resuelto por la ecuación (54)

del PIB son móviles, y que la tasa de cambio nominal no es fija sino que varía de acuerdo a una elasticidad con respecto a otra variable.

2.6.3. Cierre del gobierno: A continuación se presentan los cierres del gobierno más tradicionales³⁵.

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} a) CG_{adj} \rightarrow CG_{adj} = 1 \\ b) SG \rightarrow SG = SG_0 \\ c) SGF \rightarrow SGF = SGF_0 \\ d) CGF \rightarrow CGF = CGF_0 \end{array} \right\}$$

Sin embargo, ello no imposibilita que el modelador utilice otro tipo de cierres; por ejemplo, asuma que el ahorro del gobierno y el consumo del gobierno están fijos, y que la variable de holgura *TAXES* es móvil, es decir ante cualquier choque o política el gobierno va a ajustar las variables fiscales vía impuestos.

2.6.4. Cierre ahorro-inversión: En cuanto al cierre ahorro-inversión, los dos cierres de abajo son las más tradicionales³⁶.

$$(67) \left\{ \begin{array}{l} a) INV_{adj} \rightarrow INV_{adj} = 1 \\ b) S_{adj} \rightarrow S_{adj} = 1 \end{array} \right\}$$

³⁵ Si se usa el cierre de la ecuación (66a) entonces *SG* es resuelto por la ecuación (49), *SGF* es resuelto por la ecuación (51) y *CGF* es resuelto por la ecuación (52). Si se usa el cierre de la ecuación (66b) entonces *CG_{adj}* es resuelto por la ecuación (49), *SGF* es resuelto por la ecuación (51) y *CGF* es resuelto por la ecuación (52). Si se usa el cierre de la ecuación (66c) entonces *CG_{adj}* es resuelto por la ecuación (49), *SG* es resuelto por la ecuación (51) y *CGF* es resuelto por la ecuación (52). Si se usa el cierre de la ecuación (66d) entonces *CG_{adj}* es resuelto por la ecuación (52), *SG* es resuelto por la ecuación (49) y *SGF* es resuelto por la ecuación (51).

³⁶ Si se usa el cierre de la ecuación (67a) entonces *S_{adj}* es resuelto por la ecuación (59). Si se usa el cierre de la ecuación (67b) entonces *INV_{adj}* es resuelto por la ecuación (59).

Sin embargo, se podrían ensayar otro tipo de cierres, por ejemplo en vez de dejar la inversión fija se la podría eliminar una ecuación anterior y se la podría poner a variar con respecto a una o a un subconjunto de variables.

2.6.5. Otros cierres que tiene el modelo:

En el modelo se supone que Colombia es un país pequeño para todos los bienes, por consiguiente los precios mundiales de estos bienes no se ven afectados por el comportamiento de la economía colombiana.

El precio mundial del bien g exportado es fijo

$$(68) PWE_g \rightarrow PWE_g = PWE_0$$

El precio mundial del bien g importado es fijo

$$(69) PWM_g \rightarrow PWM_g = PWM_0$$

Si Colombia se hubiera asumido como un país grande para alguno de los productos, entonces se hubiera podido ensayar una forma funcional diferente a la que aparece en las ecuaciones (68) y (69).

Igualmente, se asume que no hay migración internacional ni de capital ni de trabajo, ni reproducción de los mismos³⁷, por lo tanto:

La oferta total de capital es fija

$$(70) KT \rightarrow KT = KT_0$$

³⁷ No obstante, tenga en cuenta que cuando se construye un modelo dinámico es muy importante establecer una dinámica tanto para el trabajo como para el capital.

La oferta total de cada uno de los tipos de trabajo es fija

$$(71) LS_i \rightarrow LS_i = LS0_i$$

Por otra parte, como no se esta estableciendo ninguna teoría acerca del comportamiento de las transferencias, entonces vamos a suponer que son fijas.

Por lo tanto, las transferencias se determinan a partir de:

$$(72) THE_H \rightarrow THE_H = THE0_H$$

$$(73) THG_H \rightarrow THG_H = THG0_H$$

$$(74) TGH_H \rightarrow TGH_H = TGH0_H$$

$$(75) TEH_H \rightarrow TEH_H = TEH0_H$$

$$(76) TRH_{-H} \rightarrow TRH_{-H} = TRH_{-0_H}$$

$$(77) TR_{-H_{Ht}} \rightarrow TR_{-H_{Ht}} = TR_{-H0_H}$$

$$(78) TRE_{-} \rightarrow TRE_{-} = TRE_{-0}$$

$$(79) TR_{-E} \rightarrow TR_{-E} = TR_{-E_0}$$

$$(80) TRG_{-} \rightarrow TRG_{-} = TRG_{-0}$$

$$(81) TR_{-G_t} \rightarrow TR_{-G_t} = TR_{-G0}$$

$$(82) TRRM_{-} \rightarrow TRRM_{-} = TRRM_{-0}$$

$$(83) TR_{-RM} \rightarrow TR_{-RM} = TR_{-RM0}$$

Finalmente, en cuanto a las variables de holgura³⁸ de los impuestos, se asume que son fijas de acuerdo a los cierres del gobierno que se establecieron en la ecuación (66). Sin embargo, tal como se específico en la sección 2.6.3, el modelador puede establecer fácilmente cierres

³⁸La definición de una variable de holgura se encuentra en el pie de página 30

de gobierno diferentes en donde alguna de estas variables de holgura sea móvil³⁹. No obstante, se debe tener en cuenta que al hacer lo anterior se tiene que seguir respetando la buena identificación del modelo en donde el número de ecuaciones es igual al número de variables.

Las variables de holgura de los impuestos son:

- (84) $TAXES.fx = 1;$
- (85) $TAXTYIP.fx = 1;$
- (86) $TAXTYIPG.fx(g) = 1;$
- (87) $TAXTV.fx = 1;$
- (88) $TAXTVA.fx(a) = 1;$
- (89) $TAXTIVA.fx = 1;$
- (90) $TAXTIVAG.fx(g) = 1;$
- (91) $TAXTSUB.fx = 1;$
- (92) $TAXTSUBG.fx(g) = 1;$
- (93) $TAXTYM.fx = 1;$
- (94) $TAXTYMH.fx(h) = 1;$
- (95) $TAXTYE.fx = 1;$
- (96) $TAXTM.fx = 1;$
- (97) $TAXTMG.fx(g) = 1;$

Por último, hay dos ecuaciones que son linealmente dependientes al sistema en su conjunto y que se deben cumplir siempre que se construye un modelo como el anteriormente expuesto⁴⁰.

La primera es la identidad macroeconómica del ahorro y la inversión

³⁹ Igualmente, tenga en cuenta que el modelador puede crear fácilmente variables de holgura adicionales a las que aparecen en el código del modelo; por ejemplo, una variable de holgura que afecte a todos los impuestos, excepto a los aranceles.

⁴⁰ Un buen ejercicio para el lector sería comprobar este comentario.

$$\left(\sum_g PQS_g INV_g \right) = SE_t + \left(\sum_H SH_H \right) + SG + (eBC)$$

y la segunda es el PIB nominal por el lado de la oferta

PIB →

$$PIB = \left(\sum_a PVA_a VA_a \right) + \left(\sum_g (TYIP_g + TSUB_g + TIVA_g) PQS_g Q_g + TM_g PWM_g E \times M_g \right) + \left(\sum_a TV_a P_a XSA_a \right)$$

3. Comentarios finales

El modelo que se presentó en este documento es una versión estándar de un modelo de equilibrio general computable, por consiguiente al mismo se le pueden hacer una gran variedad de extensiones de acuerdo a las necesidades del modelador, por ejemplo por el lado del consumo se pueden considerar funciones lineales de gasto, funciones lineales de gasto extendido, entre otras; se le puede introducir algún tipo de dinámica al modelo; se pueden ensayar nuevas especificaciones del mercado laboral; se puede incluir una estructura tributaria más desagregada al esquema de impuestos, etcétera.

No obstante, tenga en cuenta que el modelo, aún en su versión estándar, puede ser muy útil para responder varias preguntas a nivel empírico y teórico. Por lo tanto, lo que quedaría es invitar al lector para que haga uso de este modelo, lo modifique de acuerdo a las preguntas que necesite resolver, y de esta forma poder enriquecer las discusiones tanto académicas como de política económica que se puedan presentar.

ANEXO 1: Ventajas y Desventajas de GAMS en el Desarrollo de Modelos de Equilibrio General Computables⁴¹

El objetivo de este anexo es presentar un resumen de las ventajas y desventajas acerca de la utilización de *GAMS* en el desarrollo de modelos de equilibrio general computable (MEGC). El anexo se encuentra dividido en dos secciones. En la primera, se comentan brevemente las principales alternativas para el desarrollo de los MEGC. En la segunda, se muestra con más detenimiento las ventajas y desventajas de los lenguajes algebraicos de modelado, haciendo énfasis en el lenguaje *GAMS*.

A.1. Alternativas para el desarrollo de los MEGC. Un modelo de equilibrio general computable es ante todo un modelo de optimización en donde los agentes de la economía toman sus decisiones acorde a un proceso de racionalización que se les incorpora en el proceso de toma de decisiones. Las principales alternativas computacionales que actualmente se utilizan para el desarrollo de modelos de optimización son:

- **Lenguajes de programación de propósito general** (*C*, *C++*, *JAVA*, *VISUAL BASIC*, *FORTRAN 90*).
- **Lenguajes o entornos de cálculo numérico o simbólico** (hojas de cálculo, lenguajes para cálculo numérico intensivo, como *MATLAB*, o para cálculo simbólico, como *MAPLE* o *MATHEMATICA*)
- **Lenguajes algebraicos de modelado** (por ejemplo, *GAMS*⁴², *AMPL*⁴³, *GEMPACK*⁴⁴, *AIMMS* y *XPRESS-MP*⁴⁵)

⁴¹ Este anexo se basa en Vaughan y Perdomo (2005)

⁴² El nombre *GAMS* deriva de las iniciales de *General Algebraic Modelling System*, que como su propio nombre indica es un lenguaje algebraico de modelación, más que un programa para resolver problemas de optimización. La ventaja que presenta *GAMS*, es que junto al módulo de modelación (base) incorpora diferentes “*solver*” (algoritmos de resolución de problemas) que sirven para resolver problemas de programación matemática.

Los lenguajes de programación de propósito general son útiles cuando: (i) el tiempo de solución es crítico; (ii) el modelo es ejecutado con mucha frecuencia; (iii) el modelo tiene que ser integrado en otra aplicación; o (iv) se necesitan bien sea algoritmos de optimización específicos, o interfaces específicas para la entrada de datos o salida de resultados. Además, estos lenguajes permiten la implantación del modelo en un entorno especial de software o hardware. Como contrapartida los lenguajes de programación de propósito general requieren un tiempo de desarrollo muy elevado y, sobre todo, presentan una gran dificultad y consumo de recursos para el mantenimiento del código⁴⁶.

Los algoritmos de optimización de las hojas de cálculo (por ejemplo el *solver* de Excel), por ser aplicaciones muy comunes y conocidas, pueden ser un vehículo eficaz de difusión de un modelo entre cierto tipo de usuarios, facilitando el manejo de datos que se encuentren en dicho formato. Como ventajas específicas se puede mencionar: su facilidad de uso y presentación de los resultados en gráficos, su integración total con la hoja de cálculo, y la familiaridad de los usuarios con el entorno, facilitando la explicación del modelo y de sus resultados. Sin embargo, estos programas de optimización no inducen una buena práctica de programación, presentando tanto una dificultad inherente en el desarrollo, verificación, validación, actualización, documentación y mantenimiento del modelo, como un problema en la modelación de programas complejos y de gran tamaño, como sería el caso de gran parte de los MEGC.⁴⁷

⁴³ GAMS y AMPL son de origen estadounidense.

⁴⁴ GEMPACK es de origen australiano.

⁴⁵ AIMMS y XPRESS-MP son de origen europeo.

⁴⁶ En general, en la literatura se encuentran experiencias como la siguiente: *“La experiencia personal para el uso de los lenguajes de modelado ha sido tremendamente positiva. En el Instituto de Investigación Tecnológica (IIT)... se pasó a partir del año 1991 de utilizar lenguajes de tipo general (como FORTRAN) para el desarrollo de modelos de optimización a utilizar exclusivamente lenguajes de modelado (como GAMS). Esto ha representado un salto importante en cuanto a la productividad de los modeladores. Aplicaciones que antes requerían decenas de miles de líneas de código (en FORTRAN) ahora se desarrollan con una décima parte de la longitud original y con un esfuerzo muy inferior en tiempo (menos de la cuarta parte)”* (Linares, Ramos, Sánchez, Sarabia y Vitoriano, 2001, p. 18-19)

⁴⁷ Otra desventaja de este tipo de aplicaciones con interfaz gráfica es la poca flexibilidad para modificar los modelos, así como la dificultad para modelar escenarios con mayor complejidad.

Los lenguajes de cálculo numérico o simbólico no son específicos de problemas de optimización pero facilitan la manipulación numérica o simbólica de matrices y vectores. Adicionalmente, disponen de funciones de optimización.

Todas las alternativas anteriores pueden ser utilizadas para el desarrollo rápido de un prototipo o una demostración ya que presentan capacidades de presentación gráfica que pueden ser aprovechadas. Sin embargo, son difícilmente utilizables cuando se plantean problemas de optimización de tamaño medio o superior.

En este sentido, los lenguajes algebraicos de modelación son las alternativas más complejas y potentes por su capacidad de indexación de las variables y ecuaciones, permitiendo cambiar sin dificultad las dimensiones del modelo y separando, de forma natural, datos de resultados. Desde el punto de vista del modelador, permiten la detección de errores de consistencia en la definición y verificación del modelo. Desde el punto de vista del usuario, simplifican drásticamente su mantenimiento.

Los campos de aplicación de estos lenguajes son tan amplios como los de la optimización propiamente dicha. Abarcan desde la microeconomía y macroeconomía, hasta la cobertura de riesgos financieros, pasando por la economía de la energía, la planificación energética o eléctrica, la ingeniería química o forestal y la planificación del desarrollo económico o del comercio internacional⁴⁸.

A.2. Lenguajes algebraicos de modelado: ventajas y desventajas⁴⁹. Los lenguajes algebraicos son lenguajes de alto nivel que han sido diseñados específicamente para el

⁴⁸ "La naturaleza guiada por conjuntos de GAMS lo convierte en un poderoso e intuitivo lenguaje de modelación para resolver modelos económicos de gran escala tal como modelos industriales o agrícolas, financieros y modelos de equilibrio general computable." (Kendrick y Amman, 19991 p. 167, traducción propia.)

⁴⁹ De todos los lenguajes algebraicos mencionados, GAMS es el programa más ampliamente difundido comercialmente con su propia lista de discusión de usuarios (gams-l@listserv.gmd.de). Por lo tanto, en esta sección se va a hacer un mayor énfasis en el mismo.

desarrollo e implantación de modelos de optimización de forma más directa para los programadores y más clara para los usuarios. En consecuencia, el campo de actuación y utilidad de los modelos de optimización se ha ampliado tremendamente al utilizar estos lenguajes. Entre sus características y ventajas principales destacan las siguientes:

- Proporcionan una formulación sencilla de modelos grandes y complejos⁵⁰, al utilizar una escritura algebraica bastante cercana a la formulación que plantearían los economistas por fuera de un ambiente computacional.
- Facilitan el desarrollo de prototipos, por lo que mejoran sustancialmente la productividad de los modeladores al permitir dedicar más tiempo al diseño, ejecución del modelo y análisis de los resultados, y menos a la codificación del mismo⁵¹.
- Permiten la realización de cambios en el modelo de manera sencilla y segura, es decir, se puede afrontar un refinamiento continuo en la formulación del problema.
- Estructuran buenos hábitos de modelación al exigir una representación concisa de los parámetros/variables y sus relaciones.
- Recogen simultáneamente la estructura del modelo y su documentación.
- Separan de manera natural los datos de la estructura del modelo y ésta de los algoritmos de solución.
- Independizan la formulación del tamaño del problema, por lo que se permite usar la estructura del modelo en diferentes casos.
- Permiten la implantación de diferentes algoritmos avanzados que pueden ser intercambiados sin dificultad, debido a que es posible separar el modelo del *solver*. De esta manera, es posible probar nuevos algoritmos, métodos o versiones de los *solver* para ver cual se ajusta mejor al problema en cuestión. Por ejemplo, en el lenguaje

⁵⁰ "En la actualidad, los lenguajes de modelación son aceptados a nivel general como los mejores para representar y resolver problemas de programación matemática. Sus principales características son el uso de relaciones algebraicas y la habilidad para calcular derivadas parciales de estructuras de gran escala, multidimensionales." (Bussieck y Meeraus, 2004, p.137, traducción propia.)

⁵¹ "...el enfoque principal de un lenguaje de modelación es la representación del modelo económico y no el algoritmo de solución." (Kendrick y Amman, 19991 p. 166, traducción propia.)

GAMS se encuentran disponibles los optimizadores *BDMLP*, *CPLEX*, *OSL*, *XA*, *XPRESS* y *ZOOM* para problemas LP (programación lineal) y MIP (programación de enteros mixtos); *MINOS* y *CONOPT* para problemas NLP (programación no lineal); *DICOP* y *SBB* para problemas MINLP (programas no lineales de enteros mixtos) y *MILES* y *PATH* para problemas MCP (programas de complementariedad mixta), entre otros⁵².

- Permiten la portabilidad de los modelos entre plataformas y sistemas operativos. Una de las grandes ventajas de *GAMS* es la facilidad de migrar a versiones superiores ya que el formato general es idéntico tanto en un PC como en un supercomputador en paralelo. Adicionalmente, los modelos se pueden resolver en diferentes tipos de maquinas sin necesidad de cambiar la formulación.

Adicionalmente, *GAMS* presenta las siguientes ventajas específicas:

- Cuenta con interfases de entrada y salida de datos más estrechamente relacionados con bases de datos u hojas de cálculo.
- Se apoya en interfases gráficas que facilitan al usuario la formulación visual y el entendimiento de problemas de optimización (por ejemplo *GNUPLOT* y *GAMSsm* - manejador de escenarios- y las que se utilizan en *MATLAB*⁵³).
- Cuenta con interfaces con lenguajes de propósito general (por ejemplo *DOS*) para la ejecución de funciones externas definidas por el usuario dentro de la optimización.
- La selección automática del algoritmo de optimización.
- No es necesario incorporar dentro de la programación de los modelos a cada individuo del sistema por separado. Es decir, no es necesario hacer gran cantidad de cálculos e incorporación de datos por parte del modelador. *GAMS* genera automáticamente cada ecuación de restricción, basado en la formulación algebraica del problema y en valores

⁵² Para cualquier tipo de problemas de programación lineal, no lineal, flujos en redes o mixta complementaria resulta muy fácil implantar su formulación.

⁵³ Ver <http://www.cs.wisc.edu/math-prog/matlab.html>

específicos de los datos. Esto disminuye significativamente el tiempo y reduce los errores potenciales al momento de incorporar los datos y las transformaciones.

- Se puede introducir nueva información dentro del modelo sin tener que cambiar el programa. *GAMS* simplemente usa los nuevos valores de los datos para computar el nuevo conjunto de restricciones. Lo anterior es muy útil, en caso que sea necesario actualizar o cambiar constantemente los datos del modelo.
- *GAMS* viene con una librería llamada *GAMSLIB* que incorpora alrededor de cien modelos, los cuales abarcan diversos problemas económicos relacionados con la agricultura, industria, equilibrio general computable, y diversos modelos muy simples y muy complejos⁵⁴.

Como desventajas principales de los lenguajes algebraicos de modelado, las cuales son compartidas por *GAMS*, se pueden mencionar las siguientes:

- Siendo un lenguaje de modelación algebraico, no es eficiente en la realización de operaciones matriciales⁵⁵.
- No pueden utilizarse para la resolución directa de problemas gigantescos, a partir de un millón de restricciones y/o variables, ya que su formulación completa no se puede realizar.
- En la ejecución se incluye un tiempo de creación del modelo y de interfaz con el algoritmo, que en ocasiones hace demorada la obtención de la solución. Por lo tanto, no es recomendable cuando el tiempo de ejecución es un factor crítico. Sin embargo, *GAMS* tiene la ventaja de identificar errores lógicos (por ejemplo división por cero) o

⁵⁴ "... casi cualquier operación que se puede representar algebraicamente se puede hacer en *GAMS*" (Kendrick y Amman, 1999, p. 163, traducción propia.)

⁵⁵ Esto no quiere decir que no sea conveniente para manipular matrices de contabilidad social, las cuales son el principal insumo de los modelos de equilibrio general computable (de hecho, existen programas eficientes en *GAMS* diseñados para la preparación de una matriz de contabilidad social en las etapas previas a la programación del modelo). Para lo que no es eficiente *GAMS* es para modelar operaciones de álgebra matricial, como sí lo es *MATLAB*, por ejemplo.

de escritura (por ejemplo errores en la digitación de comandos) antes de proceder a la ejecución del algoritmo de solución.

- No hay independencia en cuanto a los algoritmos de solución que se pueden utilizar para solucionar los problemas de optimización. Sin embargo, la incorporación de algoritmos en *GAMS* es un proceso que está en continuo desarrollo, en cada nueva versión del programa se ha dado acceso a los usuarios a una mayor variedad de algoritmos de solución.

ANEXO 2: Proceso de Calibración de los Parámetros y de los Diferentes tipos de Funciones Utilizados en el Modelo⁵⁶

En este anexo se explica cómo se hace la calibración de los parámetros que aparecen en las diferentes formas funcionales que se utilizan en el modelo: Leontief, Cobb-Douglas, función CES y función CES con dos factores de producción⁵⁷. La explicación se va a adelantar desde el punto de vista de un agente que busca maximizar un determinado valor dentro de una función. Para propósitos de redacción se va a suponer que este agente es un productor que pretende encontrar las cantidades de insumos (X_i) y de producto (Y) que le permitan maximizar el beneficio (π).

Tenga en cuenta que al momento de resolver el problema en el escenario base se conoce el valor de las cantidades (los datos provienen de la matriz de contabilidad social) y de los precios (son unitarios o se les ha adicionado una tasa impositiva). En consecuencia los parámetros que son desconocidos y que se deben calibrar en cada una de las ecuaciones son los coeficientes (claro que en el caso de las funciones CES, se necesita determinar de antemano cuáles son las elasticidades de sustitución).

Función Leontief

Calibración de parámetros: El problema a resolver es

$$\text{Max } \pi = PY - \sum_i P_i X_i \text{ donde } Y = \min\{\phi_1 X_1, \dots, \phi_n X_n\}$$

⁵⁶ Para un mayor entendimiento de este anexo se recomienda compararlo con la información que se encuentra programada en los archivos *parameters.gms* y *estructura.gms*.

⁵⁷ Para esta última función se va a explicar un mecanismo de calibración alternativo al de las funciones CES en general.

Los parámetros que se van a calibrar son los ϕ_i . Dadas las características de la función de producción Leontief (o de coeficientes fijos), entonces la producción óptima viene determinada por:

$$(L1) Y = \phi_1 X_1 = \dots = \phi_n X_n$$

Por lo tanto, despejando ϕ_i de la ecuación (L1) se obtiene que

$$\phi_i = \frac{Y}{X_i}$$

Ecuaciones que se programan: Teniendo los parámetros calibrados, entonces las ecuaciones que se incorporan dentro de la estructura del modelo salen de despejar los X_i de la ecuación (L1):

$$X_i = \frac{Y}{\phi_i}$$

Función Cobb-Douglas

Calibración de parámetros: El problema a resolver es

$$Max \quad \pi = PY - \sum_i P_i X_i = P \prod_i X_i^{\beta_i} - \sum_i P_i X_i$$

Los parámetros que se van a calibrar son los β_i . Para encontrarlos, se calculan las condiciones de primer orden del anterior problema de optimización las cuales vienen representadas por:

$$\text{(CD1)} \quad \frac{\partial \pi}{\partial X_i} = P\beta_i \frac{Y}{X_i} - P_i = 0$$

Por lo tanto, al despejar los β_i de la ecuación (CD1) se obtiene

$$\beta_i = \frac{P_i X_i}{P Y}$$

Ecuaciones que se programan: Teniendo los parámetros calibrados, entonces las ecuaciones que se incorporan dentro de la estructura del modelo son:

$$X_i = \frac{\beta_i P Y}{P_i}$$

$$Y = \prod_i X_i^{\beta_i}$$

Observe que en el modelo que se presenta en el documento las únicas funciones que son de tipo Cobb-Douglas son las de consumo total de cada uno de los hogares h . Sin embargo, al mismo tiempo observe que ninguna de las dos ecuaciones del recuadro anterior aparece programada dentro del modelo, esto se debe a dos motivos. El primer motivo consiste en que no se incluyó como una variable explícita al consumo del bien g que hace el hogar h ; sin embargo, si esta variable se hubiera hecho explícita dentro del modelo entonces se hubiera tenido que incluir la primera ecuación del recuadro.

El segundo motivo es que dentro del modelo no se programó en forma explícita una variable que represente las cantidades totales consumidas por el hogar h y una variable que represente el precio implícito de esas cantidades. Lo que si se hizo fue utilizar una variable que representa el valor del consumo total del hogar h , donde éste viene determinado por la diferencia entre el ingreso disponible del hogar y la suma del ahorro con las transferencias hechas por el hogar h al resto de la economía (ver ecuación 37).

Si se hubiera querido incorporar en forma explícita a las cantidades totales consumidas por el hogar h , entonces se hubiera tenido que incluir la segunda ecuación del recuadro. Por otra parte, si se hubiera querido incorporar en forma explícita el precio implícito de esas cantidades, entonces se hubiera tenido que incorporar una ecuación en donde el valor del consumo total del hogar h es igual a las cantidades totales consumidas por el hogar h multiplicadas por el precio implícito de dichas cantidades.

Función CES con dos o más elementos X_i :

Calibración de parámetros: El problema a resolver es

$$\text{Max } \pi = PY - \sum_i P_i X_i = P\alpha \left\{ \sum_i [\delta_i \times X_i^{-\rho}] \right\}^{-1/\rho} - \sum_i P_i X_i \quad \text{donde } \sum_i \delta_i = 1$$

En este caso, los parámetros que se van a calibrar son α y los δ_i dada una elasticidad σ_i .⁵⁸ Para encontrarlos, se calculan las condiciones de primer orden del problema de optimización, las cuales vienen representadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial X_i} &= P\alpha \left\{ \sum_i [\delta_i \times X_i^{-\rho}] \right\}^{-1/\rho - 1} \delta_i X_i^{-\rho - 1} - P_i = 0 \Rightarrow PY \left\{ \sum_i [\delta_i \times X_i^{-\rho}] \right\}^{-1} \delta_i X_i^{-\rho - 1} = P_i \\ &\Rightarrow \frac{PY \delta_i \left\{ \sum_i [\delta_i \times X_i^{-\rho}] \right\}^{-1}}{X_i^{1+\rho}} = P_i \Rightarrow \frac{PY \delta_i Y^\rho \alpha^{-\rho}}{X_i^{1+\rho}} = P_i \Rightarrow P\alpha^{-\rho} \delta_i \left(\frac{Y}{X_i} \right)^{1+\rho} = P_i \\ &\Rightarrow \text{(CES1)} \quad \delta_i = \alpha^\rho \frac{P_i}{P} \left(\frac{X_i}{Y} \right)^{1+\rho} \end{aligned}$$

⁵⁸ Esta elasticidad tiene que ser determinada por fuera del modelo.

Si se suman las condiciones de primer orden, entonces:

$$1 = \sum_j \delta_j = \frac{\alpha^\rho}{PY^{1+\rho}} \sum_j P_j X_j^{1+\rho}$$

$$\Rightarrow \text{(CES2)} \quad \alpha^\rho \sum_j P_j X_j^{1+\rho} = PY^{1+\rho}$$

Por lo tanto, al remplazar (CES2) en (CES1) se obtiene que

$$\delta_i = \alpha^\rho \frac{P_i X_i^{1+\rho}}{\alpha^\rho \sum_j P_j X_j^{1+\rho}} \Rightarrow \delta_i = \frac{P_i X_i^{1+\rho}}{\sum_j P_j X_j^{1+\rho}}$$

y dado que⁵⁹ $\sigma = \frac{1}{1+\rho} \Rightarrow 1+\rho = \frac{1}{\sigma}$ entonces

$$\delta_i = \frac{P_i X_i^{1/\sigma}}{\sum_j P_j X_j^{1/\sigma}}$$

Finalmente, despejando α de la función de producción se obtiene que:

$$\alpha = \frac{Y}{\left\{ \sum_i [\delta_i \times X_i^{-\rho}] \right\}^{-1/\rho}}$$

⁵⁹ $\sigma = \frac{(\partial f / \partial X_1)(\partial f / \partial X_2)}{f(\cdot)(\partial^2 f / \partial X_1 \partial X_2)} = \frac{\left[P\delta \left(\frac{Y}{X_1} \right)^{1+\rho} \right] \left[P(1-\delta) \left(\frac{Y}{X_2} \right)^{1+\rho} \right]}{\left[Y \right] \left[\frac{(1+\rho)P^2\delta(1-\delta)Y^{1+2\rho}}{X_1^{1+\rho} X_2^{1+\rho}} \right]} = \frac{1}{(1+\rho)}$

Ecuaciones que se programan: Teniendo los parámetros calibrados, entonces se despeja P_i en (CES1) y se obtiene la ecuación para este precio:

$$\delta_i = \alpha^\rho \frac{P_i}{P} \left(\frac{X_i}{Y} \right)^{1+\rho} \Rightarrow \frac{P_i}{P} = \left(\frac{Y}{X_i} \right)^{1+\rho} \frac{\delta_i}{\alpha^\rho} \Rightarrow P_i = PY (Y^\rho \alpha^{-\rho}) \delta_i X_i^{-(1+\rho)}$$

$$\Rightarrow P_i = PY \left\{ \sum_i [\delta_i \times X_i^{-\rho}] \right\}^{-1} \delta_i X_i^{-(1+\rho)}$$

Asimismo, se programa la función de producción:

$$Y = \alpha \left\{ \sum_i [\delta_i \times X_i^{-\rho}] \right\}^{-1/\rho}$$

Función CES con dos elementos X_1 y X_2 :

Calibración de parámetros: El problema a resolver es

$$\text{Max } \pi = PY - P_1 X_1 + P_2 X_2 = P \alpha \left[\delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho} \right]^{-1/\rho} - P_1 X_1 + P_2 X_2$$

Los parámetros a calibrar son α y δ dada una elasticidad σ_i ⁶⁰ El cálculo puede ser directo acorde a lo visto en la sección anterior. Sin embargo, existe otra forma de calcular δ .

Las condiciones de primer orden del problema de optimización vienen representadas por:

⁶⁰ Esta elasticidad tiene que ser determinada por fuera del modelo.

$$\frac{\partial \pi}{\partial X_1} = P \delta X_1^{-(1+\rho)} \alpha [\delta X_1^{-\rho} + (1-\delta) X_2^{-\rho}]^{-1/\rho} [\delta X_1^{-\rho} + (1-\delta) X_2^{-\rho}]^{-1} - P_1 = 0$$

$$\Rightarrow P Y \delta X_1^{-(1+\rho)} \left(X_1^{-1} [\delta X_1^{-\rho} + (1-\delta) X_2^{-\rho}] \right) = P_1 \Rightarrow \delta = \frac{P_1}{P} \alpha^{-\rho} \left(\frac{X_1}{Y} \right)^{1+\rho}$$

$$\Rightarrow P \delta \left(\frac{Y}{X_1} \right)^{1+\rho} - P_1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{(CES3)} \quad \delta = \frac{P_1}{P} \alpha^{-\rho} \left(\frac{X_1}{Y} \right)^{1+\rho}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial X_2} = P(1-\delta) \left(\frac{Y}{X_2} \right)^{1+\rho} - P_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{(CES4)} \quad (1-\delta) = \alpha^{-\rho} \frac{P_2}{P} \left(\frac{X_2}{Y} \right)^{1+\rho}$$

Calculando (CES3) / (CES4) se obtiene que:

$$\text{(CES5)} \quad \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{1+\rho}$$

$$\Rightarrow \delta \left[1 + \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{1+\rho} \right] = \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{1+\rho} \Rightarrow \delta = \frac{\frac{P_1}{P_2} \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{1+\rho}}{\left[1 + \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{1+\rho} \right]}$$

y dado que⁶¹ **(CES6)** $\sigma = \frac{1}{1+\rho} \Rightarrow 1+\rho = \frac{1}{\sigma}$ entonces

⁶¹ Ver pie de página anterior.

$$\delta = \frac{\frac{P_1}{P_2} \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{\frac{1}{\sigma}}}{\left[1 + \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right]}$$

Finalmente, despejando α de la función de producción se obtiene, al igual que en el caso general de la CES, que:

$$\alpha = \frac{Y}{\left[\delta X_1^{-\rho} + (1-\delta) X_2^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}}$$

Ecuaciones que se programan: En cuanto a las ecuaciones que se utilizan en la estructura del modelo, éstas se toman del problema anteriormente descrito y son⁶²:

$$\frac{X_1}{X_2} = \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^{\sigma} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\sigma}$$

$$P_1 = PY \left[\delta X_1^{-\rho} + (1-\delta) X_2^{-\rho} \right]^{-1} \delta X_1^{-(1+\rho)}$$

$$Y = \alpha \left[\delta X_1^{-\rho} + (1-\delta) X_2^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

La primera ecuación sale de despejar (X_1/X_2) en la ecuación (CES5) y de reemplazar en ésta la ecuación (CES6).

⁶² En ocasiones no es necesario programar las tres ecuaciones sino solamente dos porque alguna de las variables puede estar determinada por otra ecuación del modelo.

Para hallar la segunda ecuación necesita un poco más de procesamiento tal como se explica a continuación:

Rescriba (CES3) y (CES4) de la siguiente forma,

$$P_1 X_1 = (PY)Y^\rho \delta X_1^{-\rho} \quad \text{y} \quad P_2 X_2 = (PY)Y^\rho (1 - \delta) X_2^{-\rho}$$

Ahora, sume estas dos ecuaciones

$$P_1 X_1 + P_2 X_2 = (PY)Y^\rho \delta X_1^{-\rho} + (PY)Y^\rho (1 - \delta) X_2^{-\rho} = (PY)Y^\rho [\delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho}]$$

$$\Rightarrow P_1 X_1 + P_2 X_2 = (PY)Y^\rho Y^{-\rho} \alpha^{-\rho} \Rightarrow PY = (PY)\alpha^{-\rho} \Rightarrow 1 = \alpha^{-\rho} \Rightarrow \alpha^\rho = 1$$

y como, $\delta = \alpha^\rho \frac{P_1}{P} \left(\frac{X_1}{Y} \right)^{1+\rho}$, entonces despejando la relación de precios se llega a:

$$\left| \frac{P_1}{P} = \delta \left(\frac{Y}{X_1} \right)^{1+\rho} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \delta X_1^{-(1+\rho)} Y Y^\rho = \delta X_1^{-(1+\rho)} Y \alpha^\rho [\delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho}]^{-1}, \text{ ahora} \right.$$

$$\frac{P_1}{P} = \delta X_1^{-(1+\rho)} Y Y^\rho = \delta X_1^{-(1+\rho)} Y \alpha^\rho [\delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho}]^{-1} = Y [\delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho}]^{-1} \delta X_1^{-(1+\rho)}$$

Finalmente, al despejar P_i se llega a la ecuación que se pretendía llegar.

La tercera ecuación es simplemente la función de producción.

ANEXO 3: Convención de los subíndices, parámetros y variables
utilizados en el modelo⁶³

Subíndice	Nombre
a	Actividad a
g	Bien g
h	Hogar h
l	Trabajo tipo l

Parámetros	Nombre
α_i	Parámetro de escala de la función CES respectiva
β_{hg}	Elasticidad de sustitución de la función de consumo Cobb-Douglas del hogar h
$\beta_{X_{1g}}$	Participación del bien g en el índice de precios de consumo
$\beta_{X_{2g}}$	Participación del bien g en el índice de precios de producción
δ_i	Parámetro de distribución de la función CES respectiva
χ_{lh}	Fracción del ingreso total de los trabajadores tipo l que es apropiado por el hogar h
ε_{ga}	Proporción del bien g que es utilizado por la actividad a como consumo intermedio
λ_i	Participación del agente respectivo en la remuneración a los rendimientos de capital
θ_i	Proporción de la producción del bien g que es producido por la actividad a
ρ_i	Parámetro de sustitución de la función CES respectiva
σ_i	Elasticidad de sustitución de la función CES respectiva

⁶³ Dentro del código del modelo, si una variable aparece con un cero al frente de esta entonces técnicamente se esta haciendo referencia a un parámetro cuyo valor es el que tiene la variable en el escenario base.

Parámetros	Nombre
$i\alpha_{a_i}$, $i\alpha_{i_a}$	Coeficientes de la función de producción Leontief de la actividad a
pmg_h	Propensión marginal a consumir por parte del hogar h

Variable	Nombre	Ecuación que la determina
Precios		
e	Tasa de cambio nominal	53 ó 65b
P_a	Precio implícito de la actividad a	10
PAG_{ag}	Precio del bien g ofertado por la actividad a	11
PB_g	Precio del bien g producido en la economía	15
$PCIA_a$	Precio implícito del consumo intermedio que utiliza la actividad a	5
PD_g	Precio del bien g producido que se vende en el mercado doméstico	56
PE_g	Precio doméstico del bien g exportado	16
$PINDEX1$	Índice de precios del consumo	64
$PINDEX2$	Índice de precios del productor	60
PM_g	Precio doméstico del bien g importado	21
PQD_g	Precio del bien compuesto Armington incluyendo impuestos	20
PQS_g	Precio del bien compuesto Armington g sin incluir impuestos	19
PVA_a	Precio implícito del valor agregado que paga la actividad a	3
PWE_g	Precio mundial del bien g exportado	68
PWM_g	Precio mundial del bien g importado	69
R	Remuneración pagada por cada unidad de capital utilizada	57
W_l	Remuneración pagada por cada unidad del tipo de tipo de trabajo l utilizado	58
Cantidades		
BC	Balanza en cuenta corriente	53 ó 54 ó 65a
CG_g	Consumo del bien g por parte del gobierno	50

Variable	Nombre	Ecuación que la determina
CIA_a	Consumo intermedio total que hace la actividad a	2a ó 2b
CIG_g	Oferta para consumo intermedio que hace la economía del bien g	4
CMT_g	Consumo agregado que los hogares hacen del bien g	38
D_g	Demanda interna del bien g producido domésticamente	13a ó 13b
D_MG_g	Demanda interna del bien g producido domésticamente incluyendo márgenes de comercio y de transporte	30
EX_g	Exportaciones del bien g	14a ó 14b
EX_MG_g	Exportaciones del bien g incluyendo márgenes de comercio y de transporte	31
INV_g	Inversión del bien g	55
K_a	Demanda por capital que hace la actividad a	7
KT	Oferta total de capital	70
LD_{al}	Demanda por el trabajo tipo l que hace la actividad a	8
LS_l	Oferta total del trabajo tipo l	71
M_g	Importaciones del bien g	18
M_MG_g	Importaciones del bien g incluyendo márgenes de comercio y de transporte	32
MGC_D_g	Márgenes de comercio para el bien doméstico g	22 ó 28
MGC_M_g	Márgenes de comercio para el bien importado g	24
MGC_X_g	Márgenes de comercio para el bien exportado g	26
MGT_D_g	Márgenes de transporte para el bien doméstico g	23 ó 29
MGT_M_g	Márgenes de transporte para el bien importado g	25
MGT_X_g	Márgenes de transporte para el bien exportado g	27
$PIBR$	PIB real	62
Q_g	Cantidad consumida del bien compuesto Armington g	17a ó 17b ó 17c
QAG_{ag}	Producción del bien g por parte de la actividad a	9
TEH_h	Transferencias de las firmas al hogar h	75

Variable	Nombre	Ecuación que la determina
TGH_h	Transferencias del gobierno al hogar h	74
THE_h	Transferencias del hogar h a las firmas	72
THG_h	Transferencias del hogar h al gobierno	73
TR_E	Transferencias a las empresas (sin remitente) ⁶⁴	79
TR_G	Transferencias al gobierno (sin remitente)	81
TR_H_h	Transferencias al hogar h (sin remitente)	77
TR_{RM}	Transferencias al resto del mundo (sin remitente)	83
$TRE_$	Transferencias de las empresas (sin destinatario)	78
$TRG_$	Transferencias del gobierno (sin destinatario)	80
TRH_h	Transferencias del hogar h (sin destinatario)	76
$TRRM_$	Transferencias del resto del mundo (sin destinatario)	82
VA_a	Cantidad utilizada de valor agregado por parte de la actividad a	6
XSA_a	Producción total de la actividad a	1a ó 1b
XSG_g	Producción total del bien g	12a ó 12b
Valores		
CM_h	Consumo total del hogar h	37
PIB	PIB nominal	61
SE	Ahorro de las empresas	40
SG	Ahorro del gobierno	49 ó 51 ó 66b
SH_h	Ahorro del hogar h	36
WL_l	Valor de la remuneración agregada por tipo de trabajo l	34
YDH_h	Ingreso disponible del hogar h	35
YE	Ingreso total de las empresas	39
YG	Ingreso total del gobierno	41
YH_h	Ingreso total del hogar h	33

⁶⁴ En las matrices de contabilidad social de Corredor y Pardo (2008) algunas de las transferencias no tienen especificado el destinatario o el remitente de las mismas.

Variable	Nombre	Ecuación que la determina
Porcentajes y tasas		
<i>BOC</i>	Balanza en cuenta corriente como porcentaje del PIB	54 ó 65c
<i>CGF</i>	Consumo del gobierno como porcentaje del PIB	52 ó 66d
<i>SGF</i>	Ahorro del gobierno como porcentaje del PIB	51 ó 66c
<i>TIVA_g</i>	Tasa impositiva al valor agregado en la producción de <i>g</i>	44
<i>TSUB_g</i>	Tasa de los subsidios directos al producto <i>g</i>	45
<i>TV_a</i>	Tasa de los impuestos indirectos netos a la producción que paga la actividad <i>a</i>	43
<i>TYIP_g</i>	Tasa de los impuestos directos al producto <i>g</i>	42
<i>TYE</i>	Tasa de los impuestos directos a los ingresos de las empresas	47
<i>TM_g</i>	Tasa arancelaria al producto <i>g</i>	48
<i>TYM_h</i>	Tasa de los impuestos directos al ingreso del hogar <i>h</i>	46
Variables de Holgura		
<i>CGadj</i>	Variable de holgura para el consumo del gobierno	49 ó 52 ó 66a
<i>INVadj</i>	Variable de holgura de la inversión	59 ó 67a
<i>Sadj</i>	Variable de holgura del ahorro de los hogares	59 ó 67b
<i>TAXES</i>	Variable de holgura para los impuestos generales	84 ó depende
<i>TAXTIVA</i>	Variable de holgura para todos los <i>TIVA_g</i>	89 ó depende
<i>TAXTIVAG_g</i>	Variable de holgura para <i>TIVA_g</i>	90 ó depende
<i>TAXTSUB</i>	Variable de holgura para todos los <i>TSUB_g</i>	91 ó depende
<i>TAXTSUBG_g</i>	Variable de holgura para <i>TSUB_g</i>	92 ó depende
<i>TAXTV</i>	Variable de holgura para todos los <i>TV_a</i>	87 ó depende
<i>TAXTVA_a</i>	Variable de holgura para <i>TV_a</i>	88 ó depende
<i>TAXTYE</i>	Variable de holgura para <i>TYE</i>	95 ó depende
<i>TAXTYIP</i>	Variable de holgura para todos los <i>TYIP_g</i>	85 ó depende
<i>TAXTYIPG_g</i>	Variable de holgura para <i>TYIP_g</i>	86 ó depende
<i>TAXTM</i>	Variable de holgura para todos los <i>TM_g</i>	96 ó depende
<i>TAXTMG_g</i>	Variable de holgura para <i>TM_g</i>	97 ó depende

Variable	Nombre	Ecuación que la determina
<i>TAXTYM</i>	Variable de holgura para todos los <i>TYM_t</i>	93 ó depende
<i>TAXTYMH_t</i>	Variable de holgura para <i>TYM_t</i>	94 ó depende
Otros		
Ω	Variable dummy	63

Bibliografía

- ❖ AMMAN, Hans y KENDRICK (1999). "Programming languages in economics" Computational Economics. Vol. 14, No. 1-2 (October 1999); p. 151-181.
- ❖ ANNABI, Nabil (2003). "Modeling Labor Markets in CGE Models: Endogenous Labor Supply, Unions and Efficiency Wages" Poverty and Economic Policy (PEP) Network Working Paper (May 2003); 28 p.
- ❖ ANNABI, Nabil; COCKBURN, John; y DECALUWÉ, Bernard. (2004). "A Sequential Dynamic CGE Model for Poverty Analysis", CIRPEE, Laval University (Mayo 2004); 25 p.
- ❖ BOURGUIGNO, François; y SPADARO, Amedeo. (2006). "Microsimulation as a Tool for Evaluating Redistribution Policies", Working Paper Series, No. 2006-20. ECINEQ Society for the Study of Economic Inequality (January 2006); 41 p.
- ❖ BUSSIECK, Michael y MEERAUS, Alexander. (2004). "General Algebraic Modeling System", En: Modeling Languages in Mathematical Optimization, Joseph Kallrath (Ed.), Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2003 chapter 8. (February 2004); p 137-157.
- ❖ CORREDOR, Diego; y PARDO, Oliver. (2008). "Matrices de Contabilidad Social 2003, 2004 y 2005 para Colombia", Archivos de Economía, No. 339. DNP (Febrero 2008); 36 p.
- ❖ FRANCOIS, Joseph. (1984). "Scale Economies and Imperfect Competition in the GTAP Model", GTAP Technical Paper No. 14 (September 1998); 22 p.
- ❖ HARRIS, Richard. (1998). "Applied General Equilibrium Analysis of Small Open Economies with Scale Economies and Imperfect Competition", The American Economic Review. Vol. 74, No. 5 (December 1984); p 1016-1032.

- ❖ HOFFMANN, Anders. (2003). "Imperfect Competition in Computable General Equilibrium Models - A Primer", *Economic Modelling*. Vol. 20, No. 1 (January 2003); p 119-139.
- ❖ LINARES, Pedro; RAMOS, Andrés; SÁNCHEZ, Pedro; SARABIA, Ángel y VITORIANO, Begoña. (2001). "Modelos Matemáticos de Optimización", Universidad Pontificia ICAI-ICADE (Octubre 2001); 51 p.
- ❖ LÖFGREN, Hans; LEE, Rebeca; y ROBINSON, Sherman. (2002). "A Standard Computable General Equilibrium (CGE) Model in GAMS", *Microcomputers in Policy Research* 5. International Food Policy Research Institute (IFPRI); 69 p.
- ❖ LÓPEZ, Enrique; RIPOLL, Marla; y CEPEDA, Freddy. (1994) "Crónicas de los Modelos de Equilibrio General en Colombia" Borradores Semanales de Economía. No. 13. Banco de la República (Diciembre 1994); 65 p.
- ❖ MAECHLER, Andréa y ROLAND-HOST, David (1995) " Empirical Specifications for a General Equilibrium Analysis of Labor Market Policies and Adjustments " OECD Development Centre Working Papers, Technical Paper N°106. OECD Development Centre (May 995); 51 p.
- ❖ MCDONALD, Scott. (2005). "The PROVIDE Project Standard Computable General Equilibrium Model: Version 2", PROVIDE Project Technical Paper 2005: 3. Elsenburg (July 2005); 67 p.
- ❖ PERDOMO, Álvaro. (2005). "Modelo de infraestructura en transporte: El capital de infraestructura como un capital complementario", *Archivos de Economía*, No. 294. DNP (Octubre 2005); 29 p.
- ❖ VAUGHAN, Daniel (2005) "Modelo de Equilibrio General Computable con Características del Mercado Laboral", Mimeo, Dirección de Estudios Económicos, Departamento Nacional de Planeación (Julio 2005); 100 p.
- ❖ VAUGHAN, Daniel y PERDOMO, Alvaro (2005) "Ventajas y Desventajas de GAMS en el Desarrollo de Modelos de Equilibrio General Computables", Mimeo, Dirección de Estudios Económicos, Departamento Nacional de Planeación.
- ❖ WILLENBOCKEL, Dirk. (2004). "Specification Choice and Robustness in CGE Trade Policy Analysis with Imperfect Competition", *Economic Modelling*. Vol. 21, No.6 (December 2004); p 1065-1099.